Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

Metsalo

Mat-1.1531 Svenskspråkig grundkurs i matematik 3-I

Tentamen 17.12.2011

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

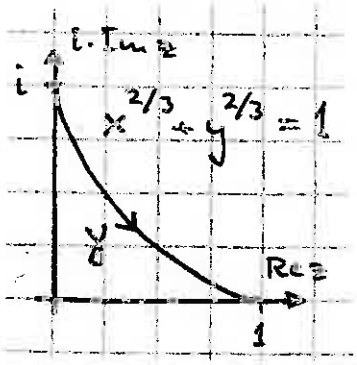
Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga, om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Observera, att olika (del-)uppgifter kan ge olika antal poäng. Nedan och på baksidan finns en del formler givna.

1. Visa att $\cos z$ inte har några andra nollställen i komplexa talplanet än de välbekanta $z = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$. (6p.)

2. a) Visa att $u(x,y) = 2x^3 + x + y^3 + y - 3x^2y - 6xy^2$ är harmonisk i xy-planet, dvs. att $u_{xx} + u_{yy} \equiv 0$. (1p.)
   b) Bestäm u:s harmoniska konjugat $v(x,y)$ sådant att u och v satisfierar Cauchy-Riemanns ekvationer $u_x = v_y, u_y = -v_x$. (v är inte entydigt bestämd, bara bestämd upp till en additativ konstant.) (2p.)
   c) $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ med u och v från de tidigare deluppgifterna är analytisk i $\mathbf{C}$. Bestäm $f'(1)$. (2p.)

3. Bessel-funktionen $J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{4^k (k!)^2}$ dyker upp bl.a. i samband med vibrerande trumskinn och svängande kedjor.
   a) Bestäm konvergensradien R för potensserien för $J_0(z)$. (2p.)
   (För $|z| < R$ är $J_0(z)$ analytisk.)
   b) Visa att $J_0(z)$ satisfierar den ordinära differentialekvationen $x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 1, y'(0) = 0$. (3p.)

4. Beräkna $\int_\gamma |z|^2 dz$, där γ är asteroidkurvan $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (eller $x(t) = (\cos t)^3, y(t) = (\sin t)^3$), som går från $z_0 = x_0 + iy_0 = i$ till $z_1 = x_1 + iy_1 = 1$ i 1:a kvadranten (se figuren till höger). (3p.)
   (Kontroll: $|z|^2 \leq M = 1$ på γ och γ har längden $L = 3/2$, så $|\int_\gamma |z|^2 dz| \leq M \cdot L = 3/2$.)



5. Beräkna integralen $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ mha. residyräkning. (5p.)
   (Kontroll: $(1+x^2)^2 \geq 1 + x^2$, så $I \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} = \pi$.)

6. Funktionen $y(t)$ är lösningen till differentialekvationen $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Bestäm Laplace-transformationen $Y(s)$ av $y(t)$, dela upp $Y(s)$ i partialbråk och transformera slutligen tillbaka (mha. formlerna på baksidan) för att få $y(t)$. (6p.)
   (Kontrollera via insättning!)

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$,
För $z = x + iy \in \mathbf{C}(x, y \in \mathbf{R})$ definieras den komplexa exponentialfunktionen som $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ och de komplexa sinus- och cosinusfunktionerna som $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ resp. $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.
Se även baksidan.

Laplace-transformationer

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^k) = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t) = s^n F(s) - f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - \ldots - s^{n-1} f(0)$$

$$\mathcal{L}(-t f(t)) = F'(s)$$

$$\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at} f(t)\right) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}(u(t-a) f(t-a)) = \mathrm{e}^{-as} F(s), \quad a \geq 0$$