Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet

Metsalo

Mat-1.1531 Svenskspråkig grundkurs i matematik 3-I

Tentamen 25.10.2011

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga, om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Observera, att olika deluppgifter kan ge olika antal poäng. På baksidan finns en del formler givna.

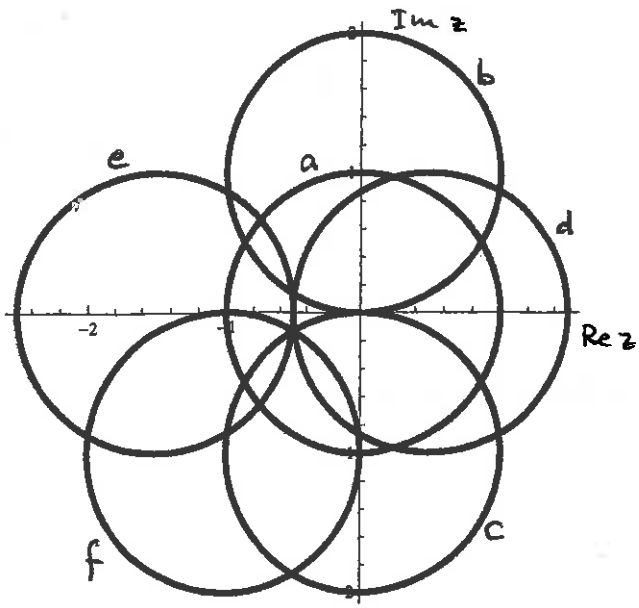
1. Visa att $\cos z$ inte har några andra nollställen i komplexa talplanet än de välbekanta reella $z = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$.

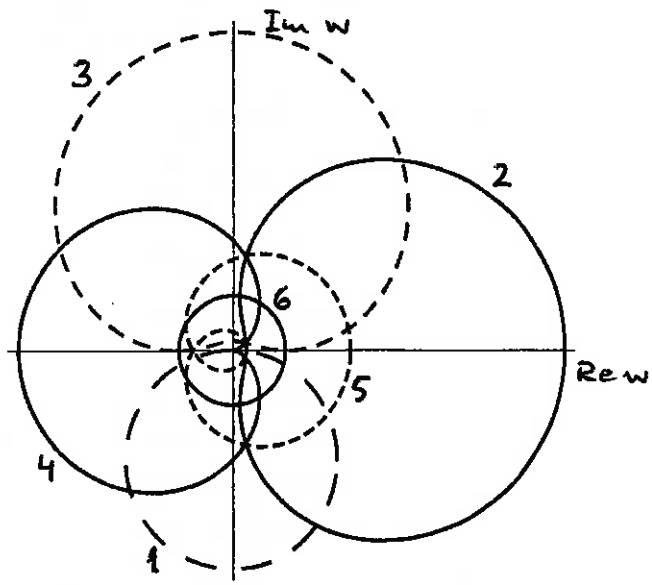
2. I denna uppgift ger rätt svar +1p, inget svar 0p och fel svar -1p, så det lönar sig inte att komma med vilda gissningar. Minimipoängen är dock 0p.
   I den vänstra figuren längst ner finns 6 cirklar i z-planet med radien 1 men med olika mittpunkter utritade. Cirklarnas mittpunkter är:
   a) 0, b) i, c) $-i$, d) 1/2, e) $-3/2$ och f) $-1-i$.
   Dessa cirklar har avbildats på w-planet via avbildningen $z \mapsto w = z^2$. Bestäm bilden i w-planet i den högra figuren av respektive cirkel i z-planet.

3. a) Bestäm nollställena hos $p(z) = z^2 - 2z + 5$. (1p.)
   b) Använd residy-räkning för att beräkna integralen $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x/2)}{x^2-2x+5} dx$. (5p.)
   (Svar: $I \approx 0.277$)

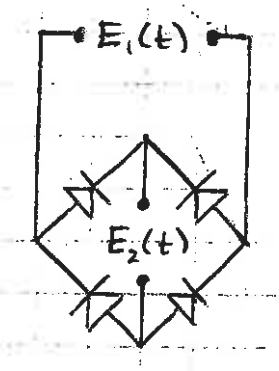
4. Lös begynnelsevärdesproblemet $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0, y(0) = 2, y'(0) = -5$ med hjälp av Laplace-transformering.

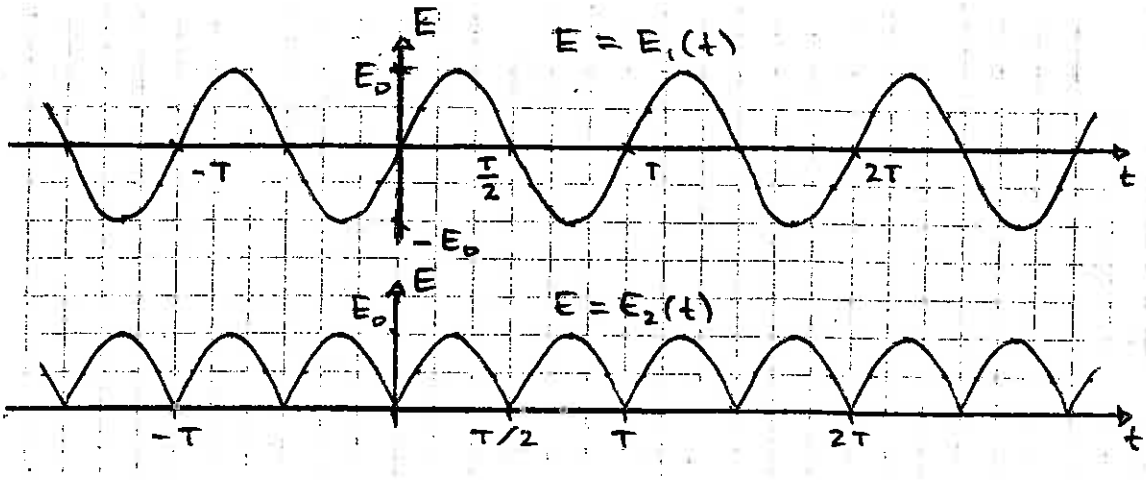
Fortsättning på baksidan.





5. Med hjälp av fyra dioder kan man bygga en *likriktare*, som omvandlar en växelspänning $E_1(t) = E_0 \sin(2\pi t/T)$ till en pulserande likspänning $E_2(t) = E_0|\sin(2\pi t/T)|$. (Vanlig nätspänning har $E_0 = 220V$ och $T = \frac{1}{50}s$, men det hör inte hit.) $E_1(t)$ har svängningstiden T, så $E_2(t)$ har också svängningstiden T, men $E_2(t)$ har även en kortare svängningstid $T/2$. Vidare är $E_2(t)$ en jämn funktion, så den kan även ges som en cosinus-serie på formen $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nt/(T/2)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(4\pi nt/T)$, där koefficienterna a_k kan beräknas via $a_0 = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} E_2(t)dt$, $a_k = \frac{2}{T/2}\int_0^{T/2} E_2(t)\cos(2\pi kt/(T/2))dt$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$.
Bestäm koefficienterna a_k för $k = 0, 1, 2, \ldots$.





Nyttiga (?) formler:
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$,
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta), \sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \Rightarrow$
$\cos(\alpha)\cos(\beta) = (\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))/2, \sin(\alpha)\sin(\beta) = (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))/2$ och
$\sin(\alpha)\cos(\beta) = (\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))/2$.
För $z = x + iy \in \mathbf{C}(x, y \in \mathbf{R})$ definieras den komplexa exponentialfunktionen som $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ och de komplexa sinus- och cosinusfunktionerna som $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ resp. $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

Laplace-transformationer

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$
$$\mathcal{L}(t^k) = \frac{k!}{s^{k+1}}$$
$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{at}) = \frac{1}{s-a}$$
$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t) = s^n F(s) - f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \ldots - s^{n-1}f(0)$$
$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(s)$$
$$\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{at}f(t)\right) = F(s-a)$$
$$\mathcal{L}(u(t-a)f(t-a)) = \mathrm{e}^{-as}F(s), \quad a \geq 0$$