TASKULASKIN SALLITTU, EI APUKIRJALLISUUTTA.

1. Mitkä seuraavista vektorifunktioista ovat lähteettömiä (divergenssittömiä) ja mitkä pyörteettömiä (roottorittomia)? Perustele laskemalla.

   (a) $\bar{f}_a(\bar{r}) = \bar{r}$ (pallokoordinaatiston paikkavektori)

   (b) $\bar{f}_b(\bar{r}) = 2\bar{u}_x + 3\bar{u}_y - 3\bar{u}_z$

   (c) $\bar{f}_c(\bar{r}) = z\bar{u}_\varphi$, missä $\bar{u}_\varphi$ on sylinterikoordinaatiston napakulmasuuntainen yksikkövektori.

2. Metallipallon halkaisija on 20 cm. Kuinka suuri jännite metallipalloon voidaan kytkeä ennenkuin kentänvoimakkuus ylittää ilman läpilyöntivoimakkuuden, joka on $E_\ell = 3\text{MV/m}$? Entäpä mikä on tilanne, kun pallo upotetaan öljyyn, jolle $E_\ell = 15\text{MV/m}$? Öljyn dielektrisyysvakio on $\epsilon_1 = 2{,}5\epsilon_0$. Mitkä vastaavat jännitteet ovat 40 cm:n pallolle?

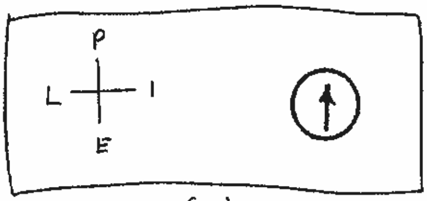
3. Kaadetaan nestettä kahden pystyssä olevan sylinteripinnan väliin ja mitataan sylinterien välinen resistanssi R. Metallisylinterit lepäävät eristävällä pohjalla, ovat samankeskisiä ja ympyräpoikkipintaisia; sisemmän säde olkoon a ja ulomman b. Johda lauseke nesteen tilavuudelle mitatun resistanssin funktiona, kun nesteen johtavuus σ tunnetaan.

   Laske numeroesimerkki: $b = 2\,\text{cm}$, $a = 1\,\text{cm}$, mitattu resistanssi on $0{,}21\,\Omega$ ja nesteen johtavuus on $\sigma = 220\,\text{S/m}$. Montako millilitraa nestettä on?

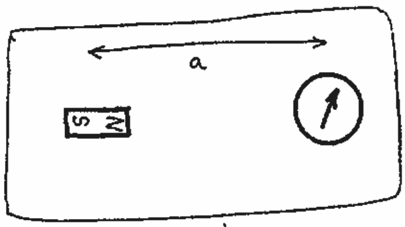
4. (a) Origossa sijaitsee kestomagneetti, jonka dipolimomentin suunta on z-suunta. Mihin suuntaan osoittaa sen magneettikenttä karteesisen koordinaatiston pisteessä $(x, y, z) = (b, 0, b)$? Ilmoita vastauksesi yksikkövektoreiden $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$ avulla. (Vihje: dipolin potentiaalin paikkariippuvuus on $\bar{p} \cdot \bar{u}_r / r^2$.)

   (b) Kompassi näyttää pohjoiseen (a)-kuvan mukaan. Jos läheisyyteen tuodaan kestomagneetti riittävän lähelle, kompassin näyttämä muuttuu. Pannaan magneetti kompassin länsipuolelle siten, että sen pohjoisnapa osoittaa itään, ks. (b)-kuva. Huomataan, että kompassin näyttämä on 5° pohjoisesta koilliseen päin, kun etäisyys on a. (Magneetti on samassa tasossa, missä kompassineula liikkuu, ei siis sen ylä- tai alapuolella.)

   Mihin suuntaan kompassineula näyttää, jos magneetti tuodaan kaksi kertaa lähemmäksi (siis kun a pienenee puoleen)?



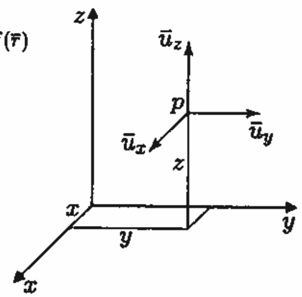
(a)



(b)

Nablaoperaatiot

Karteesinen koordinaatisto

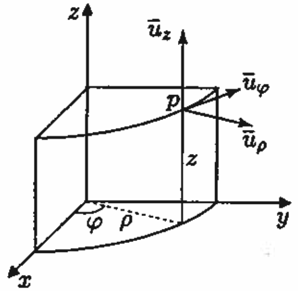


$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_x \frac{\partial}{\partial x} f(\overline{r}) + \overline{u}_y \frac{\partial}{\partial y} f(\overline{r}) + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f(\overline{r})$$

$$\nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \overline{u}_x & \overline{u}_y & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f}(\overline{r}) = \frac{\partial}{\partial x} f_x(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(\overline{r}) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(\overline{r})$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



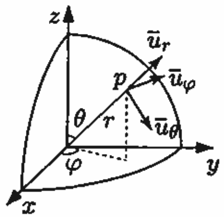
Sylinterikoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f + \overline{u}_z \frac{\partial}{\partial z} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \overline{u}_\rho & \rho \overline{u}_\varphi & \overline{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_\rho & \rho f_\varphi & f_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} f_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



Pallokoordinaatisto

$$\nabla f(\overline{r}) = \overline{u}_r \frac{\partial}{\partial r} f + \overline{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \overline{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f$$

$$\nabla \times \overline{f} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \overline{u}_r & r\overline{u}_\theta & r\sin\theta \overline{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_r & r f_\theta & r \sin\theta f_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla \cdot \overline{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} f_\varphi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Koordinaattimuunnokset vektorille $\overline{f}$

Karteesinen ↔ sylinterikoordinaatisto

$x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, $z = z$,

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$, $z = z$.

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Karteesinen ↔ pallokoordinaatisto

$x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$,

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)$, $\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Sylinteri ↔ pallokoordinaatisto

$\rho = r \sin\theta$, $\varphi = \varphi$, $z = r\cos\theta$,

$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\theta = \arctan(\rho/z)$, $\varphi = \varphi$.

$$\begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_r \\ f_\theta \\ f_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix}.$$

Vektori-integraalilaskennan kaavoja

Karteesinen koordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_x\, dx + \overline{u}_y\, dy + \overline{u}_z\, dz$

$\overline{dS_x} = \overline{u}_x\, dy\, dz$

$\overline{dS_y} = \overline{u}_y\, dx\, dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z\, dx\, dy$

$dV = dx\, dy\, dz$

Sylinterikoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_\rho\, d\rho + \overline{u}_\varphi \rho\, d\varphi + \overline{u}_z\, dz$

$\overline{dS_\rho} = \overline{u}_\rho \rho\, d\varphi\, dz$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi\, d\rho\, dz$

$\overline{dS_z} = \overline{u}_z \rho\, d\rho\, d\varphi$

$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

Pallokoordinaatisto

$\overline{d\ell} = \overline{u}_r\, dr + \overline{u}_\theta r\, d\theta + \overline{u}_\varphi r \sin\theta\, d\varphi$

$\overline{dS_r} = \overline{u}_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$\overline{dS_\theta} = \overline{u}_\theta r \sin\theta\, dr\, d\varphi$

$\overline{dS_\varphi} = \overline{u}_\varphi r\, dr\, d\theta$

$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Gaussin lause $\int_V \nabla \cdot \overline{f}\, dV = \oint_S \overline{f} \cdot \overline{dS}$

Stokesin lause $\int_S \nabla \times \overline{f} \cdot \overline{dS} = \oint_C \overline{f} \cdot \overline{d\ell}$

Vakioita

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$