Matematiikka
Aalto-yliopisto

Varpanen / Niemenmaa

Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I (5op)

Tentti 23.10.2012

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää laskinta. Koeaika on neljä tuntia.

1. Mitkä Gaussin kokonaisluvuista

$$\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

ovat kääntyviä kompleksilukujen kertolaskun suhteen? Perustele. (6p)

2. a) Esitä luku $(1+i)^{10}$ muodossa $x + iy$. (3p)

   b) Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Millaiseksi f kuvaa sektorin

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \ :\ |z| \leq \frac{3}{2} \ \text{ja}\ \frac{\pi}{6} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{2} \right\}?$$

   Piirrä kuva. (3p)

3. a) Esitä funktio $f(z) = e^z/(1-z)$ potenssisarjana kiekossa $|z| < 1$. (Vihje: kerro kaksi potenssisarjaa keskenään.) (3p)

   b) Perustele (3p), miksi funktion $f(t) = \sin(2\pi\nu_0 t)$ Fourier-muunnos on

$$\widehat{f}(\nu) = \frac{1}{2i}\big(\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)\big).$$

4. Funktiolle $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (1 - \cos z)^2$ saadaan origon ympäristössä potenssisarjaesitys

$$f(z) = \sum_{k=0}^{5} a_k z^k + \mathcal{O}(z^6).$$

   Määritä kertoimet a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ja a_5. (6p)

5. Kehitä funktio

$$f(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{2}{3+z}$$

   Laurent-sarjaksi annuluksessa $1 < |z| < 3$. (6p)

Kaavoja löytyy paperin kääntöpuolelta.

Fourier-muunnos:

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt.$$

Käänteinen Fourier-muunnos:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t}\, d\nu.$$

Sarjakehitelmiä:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad (|z| < 1).$$

Lisäksi:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$