

1. välikoe 15.10.2010 klo 16–19.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Ei laskimia, ei taulukoita!

1. Faarao Ramses n :s (missä luku $n \in \mathbb{Z}^+$) rakennutti itselleen porrasympyrämuotoisen muistomerkin, johon orjat pinosivat $s(n)$ kappaletta tiiliä seuraavasti: tiilikerroksia on n kappaletta, ja (pinon huipulta lukien) kerroksessa numero k on tiiliä k^2 kappaletta. Siispä $s(n) = \sum_{k=1}^n k^2$. Todista, että

$$s(n) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

2. a) Miten määritellään tason pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^2$ etäisyys $\|x - y\|$ ja pistetulo $x \cdot y$?
b) Todista, että

$$P_a(x) = \frac{x \cdot a}{a \cdot a} a$$

on pistettä $x \in \mathbb{R}^2$ lähin piste suoralla S , joka kulkee origon $o = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ja pisteen $a \neq o$ kautta. (Vihje: suoran S pisteet ovat muotoa ta , missä $t \in \mathbb{R}$, ja kannattaa tarkastella etäisyyttä $\|x - ta\|$... tämä päättely käsiteltiin luennoillakin...)

3. a) Laske matriisikertolasku $[A][A]$, kun

$$[A] = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}.$$

- b) Ratkaise $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, kun

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

4. Millä vakion $c \in \mathbb{R}$ arvoilla matriisilla

$$[B] = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2+c & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5+c & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9+c \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{cccc} c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2+c & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5+c & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9+c \end{array} \right\}$$

ei ole käänteismatriisiä? Perustele! Laske käänteismatriisi tapauksessa $c = -1$.