

Mat-1.2620 Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Tentti ja kevään 2012 kurssin välikokeiden uusinnat 28.05.2012 / Kibble

Kirjoita **selvästi** jokaiseen koepaperiin alla mainitussa järjestyksessä:

- Mat-1.2620 Tentti/1.vk/2.vk (**merkitse oikea vaihtoehto**) SovTnB 28.05.2012
- opiskelijanumero + kirjain
- TEKSTATEN sukunimi ja kaikki etunimet
- koulutusohjelma ja vuosikurssi
- mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat
- nimikirjoitus

Lue *tarkasti* seuraavat ohjeet:

- (1) Jos olet *uusimassa 1. välikoetta*, vastaa kysymyksiin 1-2 ja 6.
- (2) Jos olet *uusimassa 2. välikoetta*, vastaa kysymyksiin 3-5 ja 7.
- (3) Jos olet *suorittamassa kurssia tentillä*, vastaa kysymyksiin 1-5.
- (4) Jos olet *suorittamassa 1. välikoetta ensimmäisen kerran ja saanut siihen erikoisluvan*, vastaa kysymyksiin 1, 2, 6 ja 8.
- (5) Jos olet *suorittamassa 2. välikoetta ensimmäisen kerran ja saanut siihen erikoisluvan*, vastaa kysymyksiin 3-5, 7 ja 9.

Tentin kesto on 4 tuntia (vaihtoehto 3). Välikokeiden kesto on 3 tuntia (vaihtoehdot 1, 2, 4 ja 5).

Merkitse vastauspapereihisi selvästi mitä vaihtoehtoa olet suorittamassa!

Sallitut apuvälineet: *Laskin ja Mellinin kaava- ja taulukkokokoelmat.*

Vastausohjeet: *Vastaa lyhyesti ja ytimekkäästi, mutta perustele ratkaisusi. Esimerkiksi pelkkä lukuarvo vastauksena ei anna pisteitä.*

1. (a) Olkoot $\Pr(A) = 0.5$ ja $\Pr(B) = 0.3$. Määritä tapahtuman $A \cup B$ todennäköisyys, kun
Tehtävä 1: A ja B ovat toisensa poissulkevia
Tehtävä 2: A ja B ovat riippumattomia
Tehtävä 3: $\Pr(A|B) = 0.1$
- (b) Eräässä tehtaassa on 3 valmistuslinjaa, joilla tehdään samanlaisia CD-soittimia. Linja A valmistaa soittimista 30 %, linja B 25 % ja linja C 45 %. A:n valmistamista soittimista 2 %, B:n valmistamista soittimista 3 % ja C:n valmistamista soittimista 4 % on viallisia.
Valitaan satunnaisesti yksi soitin tarkistusta varten. Mikä on todennäköisyys, että soitin on tehty linjalla A, jos se on viallinen?

2. Heität virheetöntä rahaa 100 000 kertaa.
- (a) Mikä on odotettavissa oleva kruunien lukumäärä?
- (b) Mikä on todennäköisyys, että kruunien lukumäärä on suljetulla välillä [49900,50200]?

Ohje: Käytä (b)-kohdassa keskeiseen raja-arvolauseeseen perustuvaa normaalijakauma-approksimaatiota.

3. Sparks Electric Institute on julkaissut lukuja, jotka kertovat kuinka monta kilowattituntia eri kodin sähkölaitteet kuluttavat vuosittain. Se väittää, että pölynimuri kuluttaa keskimäärin 46 kilowattituntia vuodessa.

Valitaan 12 pölynimurin suuruinen yksinkertainen satunnaisotos, ja kirjataan imurien vuosittainen kilowattituntien kulutus. Aritmeettiseksi keskiarvoksi saadaan $\bar{x} = 42$ ja otosvarianssiksi $s^2 = 141.61$. Löytyykö tästä riittävästi todisteita 5% merkitsevyystasolla, että pölynimurit kuluttavat keskimäärin vähemmän kuin 46 kilowattituntia vuosittain? Oleta, että pölynimurin vuosittain kuluttamien kilowattituntien määrä on normaalijakautunut.

4. Kyselytutkimuksessa haluttiin verrata Vasemmistoliiton (Vas), Sosiaalidemokraattisen puolueen (SDP) ja Vihreän liiton (Vih) kannatuksen jakautumista äänioikeutettujen joukossa kolmessa kunnassa A, B ja C.

Vertailua varten kuntien A, B ja C äänioikeutettujen joukosta poimittiin toisistaan riippumattomat yksinkertaiset satunnaisotokset, joiden koot olivat 300 (kunta A), 180 (kunta B) ja 340 (kunta C) ja otokseen poimituilta kysyttiin, mitä puoluetta he äänestäisivät seuraavissa vaaleissa. Tulokset kyselyistä on annettu alla olevassa taulukossa.

Testaa nollahypoteesia, että puolueiden kannatus jakautuu samalla tavalla kunnissa A, B ja C, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että kannatus ei jakaudu samalla tavalla. Käytä testissä 5 %:n merkitsevyystasoa.

	Puolue	Vas	Sdp	Vih	Otoskoko
Kunta	A	60	160	80	300
	B	40	80	60	180
	C	60	160	120	340

5. Kokeessa tutkittiin seitsemän kuorma-auton polttoainetaloudellisuuden (muuttuja y , yksikkönä mi/gal , mailia per gallona) riippuvuutta ajoneuvon painosta (muuttuja x , yksikkönä ton , tonni). Kokeesta saadut tiedot on annettu alla olevassa taulukossa.

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	8.00	24.50	27.00	14.50	28.50	12.75	21.25
y_i	7.69	4.97	4.56	6.49	4.34	6.24	4.45

Aineistoa kuvaavat otostunnusluvut ovat:

$$\bar{x} = 19.5 \qquad \bar{y} = 5.5343$$

$$s_x^2 = 61.354 \qquad s_y^2 = 1.655$$

$$s_x = 7.833 \qquad s_y = 1.286$$

$$s_{xy} = -9.518 \qquad r_{xy} = -0.945$$

- (a) Määrittää tavanomaisen yhden selittäjän lineaarisen regressiomallin

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$$

regressiokertoimien β_0 ja β_1 pienimmän neliösumman (PNS-) estimaatit.

- (b) Jäännösvarianssin σ^2 harhattomaksi estimaatiksi tutkijat laskivat arvon $s^2 = 0.214$. Ennusta muuttujan y keskimääräinen arvo, kun $x = 40$. Määrittää myös 95%:n luottamusväli ennusteelle.

6. Tehdas valmistaa tuotetta, jolla on erittäin korkeat laatuksiteerit. Keskimäärin vain 60 % tuotteista täyttää kriteerit. Poimitaan tuotteita tarkastettavaksi satunnaisesti yksi kerrallaan.

Tehtävä 1: Mikä on todennäköisyys sille, että joudumme tarkastamaan vähintään 4 tuotetta ensimmäisen viollisen tuotteen löytämiseksi?

Tehtävä 2: Mikä on odotettavissa oleva lukumäärä tuotteille, jotka joudumme tarkastamaan ensimmäisen viollisen tuotteen löytämiseksi?

Tehtävä 3: Mikä on todennäköisyys, että joudumme tarkastamaan ainakin 5 tuotetta kolmannen viollisen tuotteen löytämiseksi?

7. Tehdas väittää, että normaalitilanteessa sen valmistamista tuotteista 2.5 % on viallisia. Asiakas poimii tuotteiden joukosta yksinkertaisen satunnaisotoksen, jonka koko on 100, ja löytää 9 viallista tuotetta. Voidaanko tehtaan väitettä viallisten tuotteiden suhteellisesta osuudesta pitää oikeutettuna?

Vastaa kysymykseen määräämällä otoksesta 95 %:n ja 99 %:n *luottamuskäyrit* viallisten tuotteiden todelliselle suhteelliselle osuudelle ja tekemällä johtopäätökset tehtaan väitteen oikeutuksesta niiden perusteella.

8. Alla oleva taulukko esittää diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktioita, $f_{XY}(x, y) = \Pr(X = x \text{ ja } Y = y)$.

$f_{XY}(x,y)$		x		
		-1	1	2
y	3	0	0	1/4
	1	1/4	1/4	0
	-2	1/4	0	0

Määrää:

- (a) Satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat.
- (b) Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot, varianssit ja standardipoikkeamat.
9. Maissa A ja B on paljon jalavapuita, joissa monissa on jalavatautisieni. Tutkimuksessa havaitaan, että maassa A 500:n jalavan satunnaisotoksessa 325:lla puulla on jalavatautisieni ja että maassa B 300:n jalavan satunnaisotoksessa 201:lla puulla on jalavatautisieni.
- Puuasiantuntijoilla on teoria, että sairaiden puiden suhteellinen osuus maassa B on suurempi kuin maassa A, koska tauti saapui maahan B ensin. Testaa 1%:n merkitsevyystasolla asiantuntijoiden teoriaa.