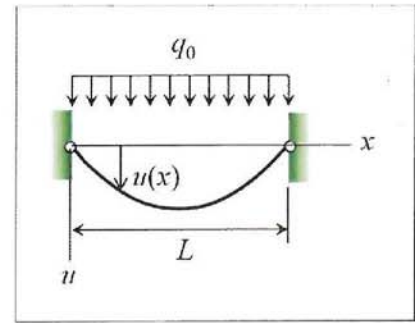


- ① Tarkastellaan kahden seinän välille ripustettua venymätöntä ja painotonta köyttä, johon kohdistuu tasaisesti jakaantunut pytysuora kuormitus  $q_0$ . Köyden muodon määrittävän reuna-arvottehtävän vahva muoto on

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{q_0}{H}, \quad 0 < x < L$$

$$u(0) = u(L) = 0$$

jossa  $u(x)$  on köyden pystysuora asema  $x$ -akselin suhteen ja  $H$  köydessä vaikuttava vakio vaakavoima.



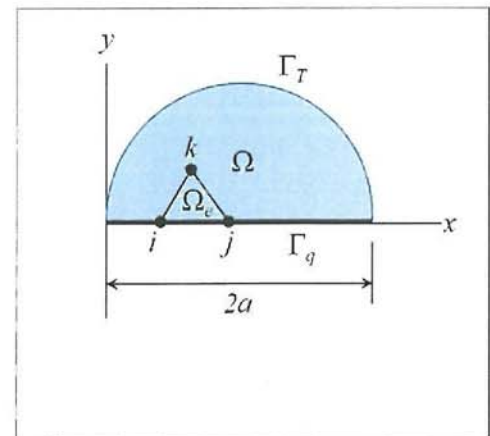
- ① (i) Muodosta köyden aseman  $u(x)$  määrittävän reuna-arvottehtävän heikko muoto, kun  $H = q_0L$ .
- ① (ii) Määritä köyden asema pisteessä  $x = L/2$  ratkaisemalla reuna-arvottehtävän heikko muoto elementtimenetelmällä kahta elementtiä ja lineaarisia muotofunktioita käyttäen.

- ② Tarkastellaan lämmönjohtumista puoliympyränmuotoisessa kappaleessa kaksiulotteisessa tapauksessa. Lämpötilan määrittävä differentiaaliyhtälö on muotoa

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = f$$

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

jossa kappaleen lämmönjohtavuus  $k$  ja lämpölähteen teho  $f$  ovat vakioita. Kappaleen reuna  $\Gamma_T$  on vakio- $\bar{T}$  lämpötilassa ja reunaa  $\Gamma_q$  lämmitetään vakio- $\bar{q}$  tehoilla.



- ① (i) Muodosta lämpötilan määrittävän reuna-arvottehtävän vahva muoto.
- ① (ii) Muodosta lämpötilan määrittävän reuna-arvottehtävän heikko muoto.
- ① (iii) Reuna-arvottehtävän ratkaisemiseksi elementtimenetelmällä käyttäen kolmioelementtejä ja lineaarisia muotofunktioita muodosta kappaleen reunalla olevan elementin  $\Omega_e$  elementtimatrisiin ja -vektorin muodostamiseksi tarvittavat lausekkeet integrointia suorittamatta.

3. Elementtimenetelmän matemaattinen virhearvio on tyypillisimmillään muotoa

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch^k |u|_{k+1}.$$

- (i) Määrittele epäyhtälössä esiintyvät suureet, muuttujat, indeksit ja muut merkinnät sekä selitä lyhyesti, mitä virhearvio kertoo elementtimenetelmän approksimaatio-ominaisuuksista.
- (ii) Täydennä alla oleva vastaavanlainen virhearvioepäyhtälö, joka on muotoa

$$\|u - u_h\|_0 \leq \dots$$

Selitä lyhyesti, mitkä ovat tämän ja edellisen virhearvion oleelliset erot?

- (iii) Euler–Bernoulli-palkkitehtävän konformiselle elementtimenetelmälle saadaan tietyin oletuksin virhearvio

$$\|w - w_h\|_2 \leq Ch^{k-1} |w|_{k+1}.$$

Jos palkkia kuormittaa palkin akselia vastaan kohtisuorasti vaikuttava kuormitus

$$f(x) = \begin{cases} f_0 x/L, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 \leq x < L \end{cases}$$

jossa  $L$  on palkin pituus ja  $f_0$  vakiokuorma, mihin muotoon yllä oleva virhearvio muuttuu kolmannen asteen Hermiten elementeillä? Perustele vastauksesi lyhyesti.

4. Reissner–Mindlin-laattatehtävän variaatiomuodossa esiintyvä bilineaarimuoto voidaan kirjoittaa muodossa

$$a(w, \beta; v, \eta) = \int_{\Omega} \kappa(\eta) \cdot D_b \cdot \kappa(\beta) d\Omega + \int_{\Omega} Gt(\nabla w - \beta) \cdot (\nabla v - \eta) d\Omega,$$

$$D_b = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$\kappa(\beta) = \left\{ \begin{array}{l} -\partial\beta_x/\partial x \\ -\partial\beta_y/\partial y \\ -(\partial\beta_x/\partial y + \partial\beta_y/\partial x) \end{array} \right\}.$$

- (i) Määrittele bilineaarimuodossa esiintyvät suureet, muuttujat, indeksit ja muut merkinnät.
- (ii) Johda tästä heikon muodon bilineaarimuodosta vastaava Kirchhoff–Love-laattatehtävän heikon muodon bilineaarimuoto.
- (iii) Käyttäen hyväksi kyseisiä bilineaarimuotoja kirjoita sekä Reissner–Mindlin- että Kirchhoff–Love-laattatehtävälle elementtimenetelmän standardimuotoiset konformiset formulaatit, jotka sisältävät bilineaarimuodon, kuormafunktionaalin ja elementtiavaruudet. Laattaa kuormittaa keskipintaa vastaan kohtisuora jakautunut kuorma ja elementteinä käytetään kolmioelementtejä.

$$\|u - u_h\|_1 \leq c_k h^s |u|_{s+1}$$

$$\|u - u_h\|_0 \leq c_0 h^{s+1} \|u - u_h\|_1 \leq \tilde{c}_k h^{s+1} |u|_{s+1}$$