Aalto-yliopisto Rasila/Korvenpää

Mat-1.1230 peruskurssi S3 Syksy 2012

1. välikoe Ti 16.10.2012 klo 16.00-19.00

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksessa sallittua laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1. Olkoon

$$z = \frac{2+i}{i-1}.$$

(a) Esitä kompleksiluku z muodossa $z = x + iy$.

(b) Esitä kompleksiluku z polaarimuodossa.

(c) Laske $\mathrm{Ln}(z)$.

2. Olkoon f funktio $f(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

(a) Esitä f muodossa $f = u + iv$.

(b) Osoita, että f on analyyttinen koko kompleksitasossa.

(c) Anna esimerkki sellaisista pisteistä z_1 ja z_2, $z_1 \neq z_2$, että $f(z_1) = f(z_2)$.

3. a) Laske kompleksinen polkuintegraali

$$\oint_C f(z)\,dz,$$

kun C on puoliympyrän $|z| < 1$, $\mathrm{Im}\, z > 0$ reuna vastapäivään kierrettynä ja $f(z) = \mathrm{Re}\, z$.

b) Määritä Laurentin sarjan

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{-k}$$

suppenemisalue.

4. Laske residymenetelmää käyttäen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Vihje: Viereisellä sivulla olevat kaavat voivat virkistää muistia.

Kaavoja:

Hyperboliset ja trigonometriset funktiot:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Cauchy-Riemannin yhtälöt:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y).$$

Möbius-kuvaukset:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

Polkuintegraali:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt.$$

Cauchyn integraalilause:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Cauchyn integraalikaava:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

Laurentin sarja:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

Residylause:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$