

1. välikoe 11.10.2010 klo 16–19.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

1. Osoita, että $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n .
2. UFO lentää hetkellä $t \in \mathbb{R}$ avaruuden pisteessä $(6-t, 2-2t, 1-3t) \in \mathbb{R}^3$.
 - a) Etsi UFO:a lähin piste lasersäteeltä (eli suoralta), joka kulkee origon ja pisteen $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ kautta.
 - b) Millä hetkellä t tämä etäisyys on lyhimmillään?
(Ratkaisussa ei saa derivoida; derivointia ei ole vielä opetettu tällä kurssilla.)
3. Tarkastellaan neljännen asteen polynomia $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tässä siis $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, missä $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Tiedetään, että

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 1, \quad p(2) = 9, \quad p(3) = 36 \quad \text{ja} \quad p(4) = 100.$$

Kirjoita lineaarinen yhtälöryhmä, ja ratkaise siitä kertoimet a, b, c, d, e Gauss-eliminaation avulla.

4. Laske alla olevien lakien (L1, L2, L3, L4) avulla

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Merkitse laskujen välivaiheisiin, mitä sääntöä kulloinkin käytät!

Olko $a, b, c, d, e, f, t \in \mathbb{R}$. Matriisin $[A] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ determinantti $\det[A]$ lasketaan seuraavien lakien avulla:

(L1) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$

(L2) $\det \begin{bmatrix} ta & b \\ tc & d \end{bmatrix} = t \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & tb \\ c & td \end{bmatrix}.$

(L3) $\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = 0.$

(L4) $\det \begin{bmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b & e \\ d & f \end{bmatrix},$
 $\det \begin{bmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}.$