

2. välikoe 16.11.2010 klo 16–19.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot on kielletty!

5. Pätee $f(x) = -\ln(1-x)$ silloin, kun sarja $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ suppenee.

a) Millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla sarja $f(x)$ suppenee? Perustele!

b) Laske a-kohdan tiedon avulla luvun $\ln(11/10)$ likiarvo tarkkuudella 10^{-3} .

6. a) Miten luvut $\cos(t)$ ja $\sin(t)$ liittyvät ympyrän kehän pituuteen? Piirrä myös kuva tästä tilanteesta!

b) Laske

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)^2 + \left(\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2}\right)^2}$$

tulkitsemalla tämä tason $\mathbb{R}^2$ erään käyrän kaarenpituudeksi.

(Vihje: tason yksikköympyrän ylempi puolikas on käyrä $y = \sqrt{1-x^2}$, missä $-1 \leq x \leq 1$.)

7. Jatkuva funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on määritelty kaavalla $f(x) = \exp(-1/x^2)$, kun $x \neq 0$.

a) Laske $f'(x)$ ja $f''(x)$, kun $x \neq 0$. (Tässä laskussa saat käyttää tuttuja derivaatan laskusääntöjä.)

b) Laske $f(0)$ ja $f'(0)$. (Tässä derivaatan laskussa on käytettävä derivaatan määritelmää eli “erotus-osamäärän raja-arvoa”.)

8. a) Selitä Newton-iteroinnin idea (piirrä myös kuva!).

b) Laske luvulle $\sqrt{7}$ likiarvo soveltamalla Newton-iterointia funktioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, missä $f(x) = x^2 - 7$. Lähde alkuarvauksesta $x_0 = 3$ ja laske iteraatiossa seuraavat likiarvot x_1 ja x_2 .