

3. välikoe 13.12.2010 klo 9–12.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.

Laskimet ja taulukot on kielletty!

9. a) Laske integraali $\int_{1/5}^{1/3} \left| \frac{1}{x} - 4 \right| dx$.

b) Olkoon funktio $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva, missä $a < b$. Määritellään $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$g(x) := \int_a^b |f(t) - x|^2 dt.$$

Millä muuttujan x arvolla saavutetaan funktion g pienin arvo?(Vastauksessa saa esiintyä edelleen tuntematon funktio f).

10. a) Laske $\int_0^4 x \sqrt{4-x} dx$.

b) Laske $\int_1^2 \frac{1}{x^2 - 3x} dx$.

11. Jatkuvan funktion $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ Laplace-muunnos pisteessä $s \in \mathbb{R}$ on

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

mikäli tämä “epäoleellinen integraali” suppenee.

Laske $\mathcal{L}f(s)$, kun $f(t) := \sin(t)$ kaikilla $t \geq 0$ — millä muuttujan $s \in \mathbb{R}$ arvoilla $\mathcal{L}f(s)$ silloin suppenee?

12. Laske Simpsonin säännöllä numeerinen likiarvo integraalille $\int_0^1 x^4 dx$,

kun integroimisväli jaetaan neljään osaväliin.

Kuinka paljon tämä likiarvo poikkeaa integraalin tarkasta arvosta?

(Vihje: kertoimet 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, $\dots$, 4, 2, 4, 2, 4, 1 saattavat virkistää muistia.)