

Yo-kirjoituksissa hyväksytty laskin sallittu.

Tehtävät

1. a) Kirjoita $\sqrt{16i}$ muodossa $x + iy$.
 b) Selvitä yhtälön $z^3 = -1$ kaikki ratkaisut muodossa $x + iy$.
2. a) Etsi matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

ominaisarvot.

- b) Olkoon

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Osoita laskemalla, että

$$B\mathbf{x} = e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbf{x}$$

kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Vihje: Aloita yhtälön oikeasta puolesta ja kirjoita $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ muodossa $x + iy$.

3. Etsi matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvoja 0 ja 3 vastaavat ominaisvektorit. (Ominaisarvoja ei siis tarvitse etsiä).

4. Määritä neliömuodon $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = x^2 - 4xy + y^2$ matriisin A ortogonaalinen diagonalisointi eli etsi ortogonaalinen matriisi P ja ja lävistämatriisi D , joille $A = PDP^T$.

Lisätieto: Trigonometrinen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{2\pi}{3} & \frac{5\pi}{6} & \pi & \frac{7\pi}{6} & \frac{4\pi}{3} & \frac{3\pi}{2} & \frac{5\pi}{3} & \frac{11\pi}{6} & 2\pi \\ \sin \alpha & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \cos \alpha & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$