

1. Äärelliset automaattit ja säännölliset lausekkeet.

- a) Esitä deterministinen äärellinen automaatti, joka tunnistaa kielen
 $L = \{w = (ab)^i a^j \mid i, j \geq 0\}$ 5 p.
- b) Esitä säännöllinen lauseke, joka kuvaa kielen
 $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{osajono } baa \text{ esiintyy } w\text{:ssä vähintään kahdesti}\}$ 5 p.
- c) Esitä minimaalinen deterministinen äärellinen automaatti, joka tunnistaa kielen
 $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:ssä on pariton määrä joko } a\text{:ta tai } b\text{:tä (mutta ei molempia)}\}$ 5 p.

1. Osoita, että kukin seuraavista kielistä on säännöllinen antamalla sille kuvaus joko säännöllisenä lausekkeena tai äärellisenä automaattina:

- (a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:n alussa tai lopussa on osajono } aba\}$ 5p.
- (b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:ssä on pariton määrä } a\text{-kirjaimia}\}$ 5p.
- (c) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ ei sisällä osajonoa } ab \text{ eikä osajonoa } ca\}$. 5p.

1. Kuvaa seuraavat kielet sekä säännöllisten lausekkeiden että determinististen äärellisten automaattien avulla:

- (a) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ sisältää osajonon } 010\}$; 7p.
- (b) $\bar{L} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ei sisällä osajonoa } 010\}$. 8p.

Vihje: (b)-kohdan ratkaisu saattaa olla helpointa johtaa (a)-kohdan ratkaisusta.

1. Osoita, että kukin seuraavista kielistä on säännöllinen antamalla sille kuvaus joko säännöllisenä lausekkeena tai äärellisenä automaattina:

- (a) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ sisältää kolme peräkkäistä nollaa tai kolme peräkkäistä ykköstä (tai molemmat)}\}$; 4p.
- (b) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ei sis. kolmea peräkkäistä nollaa eikä kolmea peräkkäistä ykköstä}\}$; 4p.
- (c) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ sisältää kolmella jaollisen määrän ykkösiä (mahdollisesti ei yhtään)}\}$; 4p.
- (d) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \geq 3 \text{ ja } w\text{:n kolmanneksi viimeinen merkki on } 1\}$. 4p.

1. Osoita, että kukin seuraavista kielistä on säännöllinen antamalla sille kuvaus joko säännöllisenä lausekkeena tai äärellisenä automaattina:

- (a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:n sisältää osajonon } aba \text{ tai loppuu osajonoon } aa\}$ 5p.
- (b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:ssä on parillinen määrä } b\text{-kirjaimia}\}$ 5p.
- (c) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ei sisällä osajonoa } aabb\}$ 5p.

1. Osoita, että kukin seuraavista kielistä on säännöllinen antamalla sille kuvaus joko säännöllisenä lausekkeena tai äärellisenä automaattina:

- (a) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \geq 2, w \text{ alkaa ja päättyy samalla merkillä}\}$, 5p.
- (b) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \geq 3, w \text{ päättyy joko jonoon } 010 \text{ tai jonoon } 110\}$, 5p.
- (c) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ei sisällä osajonoa } 1101\}$. 5p.

1. Osoita, että kukin seuraavista kielistä on säännöllinen antamalla sille kuvaus joko säännöllisenä lausekkeena tai äärellisenä automaattina:

- (a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:n sisältää osajonon } aba \text{ tai loppuu osajonoon } aa\}$ 5p.
- (b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:ssä on pariton määrä } b\text{-kirjaimia}\}$ 5p.
- (c) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ei sisällä osajonoa } aabb\}$ 5p.

1. Säännöllisiä kieliä.

(a) Olkoon

$$L = \{w \mid w = a_1 a_2 \dots a_n, n \geq 0, a_i \in \{0, 1\}, a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 1\}.$$

Toisin sanoen L koostuu niistä binäärimerkkijonoista, joiden järjestysnumeroltaan parittomissa positioissa on 1. Osoita, että L on säännöllinen, esimerkiksi esittämällä se säännöllisenä lausekkeena tai äärellisenä automaattina. 7 p.

(b) Olkoon

$$L = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ sisältää parillisen määrän } 0\text{:ia tai tasan kaksi } 1\text{:ä}\}.$$

Osoita, että L on säännöllinen, esimerkiksi esittämällä se säännöllisenä lausekkeena tai äärellisenä automaattina. 8 p.

1. (a) Laadi säännöllinen lauseke, joka kuvaa kielen

$$\{w \in \{0, 1\}^* \mid w\text{:ssä on pariton määrä nollia tai pariton määrä ykkösiä (tai molemmat)}.\}$$

5p.

(b) Laadi epädeterministinen ε -siirtymätön äärellinen automaatti, joka tunnistaa (a)-kohdan kielen.

5p.

(c) Laadi deterministinen äärellinen automaatti, joka tunnistaa (a)-kohdan kielen.

5p.

1. Osoita, että kukin seuraavista kielistä on säännöllinen antamalla sille kuvaus joko säännöllisenä lausekkeena tai äärellisenä automaattina:

(a) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w\text{:n alussa on osajono } 00 \text{ tai lopussa on osajono } 11\}$ 5p.

(b) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w\text{:ssä on kolmella jaollinen määrä } 0\text{-merkkejä}\}$ 5p.

(c) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ei sisällä osajonoa } 101\}$ 5p.

1. Osoita, että kukin seuraavista kielistä on säännöllinen antamalla sille kuvaus joko säännöllisenä lausekkeena tai äärellisenä automaattina:

(a) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w\text{:n alussa tai lopussa on osajono } 101\}$, 5p.

(b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:ssä on parillinen määrä } b\text{-merkkejä}\}$, 5p.

(c) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ei sisällä kolmea peräkkäistä ykköstä}\}$. 5p.

1. Kuvaa seuraavat kielet sekä säännöllisten lausekkeiden että determinististen äärellisten automaattien avulla:

(a) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ sisältää osajonon } 010\}$; 7p.

(b) $\bar{L} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ei sisällä osajonoa } 010\}$. 8p.

Vihje: (b)-kohdan ratkaisu saattaa olla helpointa johtaa (a)-kohdan ratkaisusta.

1. Kuvaa seuraavat kielet sekä säännöllisenä lausekkeena että äärellisenä automaattina:

~~(a)~~ $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ alkaa ja päättyy samalla merkillä}\}$, 7p.

~~(b)~~ $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ei sisällä osajonoa } 000 \text{ eikä osajonoa } 111\}$, 8p.

2. a) Laadi yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kielen

$$L = \{(ab)^n a^n \mid n \geq 0\}.$$

5p.

- b) Esitä merkkijonojen $ababa$, ab , aa ja ϵ jäsenyspuut kieliopissasi. 5p.
 c) Osoita (täsmällisesti!), että (a)-kohdan kieli L ei ole säännöllinen. 5p.

2. Tarkastellaan kieltä $L = \{0^i 1^j 0^k \mid j = i + k\}$.

- (a) Esitä yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kielen L . 8p.
 (b) Osoita, että L ei ole säännöllinen. 7p.

2. Tarkastellaan oikein sulutettuja kaari- ja hakasuluista muodostettuja merkkijonoja. Esimerkiksi $([])[\]$ ja $[(\])$ ovat oikein sulutettuja merkkijonoja, mutta $([\])$, $[\]$ ja $[\](\]$ eivät ole. Formaalisimmin oikein sulutetut merkkijonot voidaan määritellä induktiivisesti: ϵ on oikein sulutettu merkkijono, ja jos x ja y ovat oikein sulutettuja merkkijonoja, niin myös (x) , $[y]$ ja xy ovat oikein sulutettuja merkkijonoja. Olkoon L oikein sulutettujen merkkijonojen muodostama kieli.

- (a) Laadi yhteydetön kielioppi, joka kuvaa kielen L . 8 p.
 (b) Esitä merkkijonojen $([])[\]$ ja $[(\])$ jäsenyspuut kieliopissasi. 7 p.

2. (a) Osoita, että seuraava yhteydetön kielioppi on moniselitteinen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \mid A \\ A &\rightarrow abA \mid \epsilon \end{aligned}$$

4 p.

- (b) Laadi saman kielen tuottava yksiselitteinen kielioppi. 5 p.

- (c) Osoita (täsmällisesti!) että edellä tarkasteltu, (a)- ja (b)-kohdan kielioppien tuottama kieli ei ole säännöllinen. 5 p.

2. Tarkastellaan kieltä

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w = w^R\},$$

missä merkintä w^R tarkoittaa merkkijonon w käänteismerkkijonoa (esimerkiksi $(abc)^R = cba$).

- (a) Osoita, että kieli L on yhteydetön. \rightarrow 7p.
 (b) Osoita, että kieli L ei ole säännöllinen. $PVM \neq PA$ $abcabacba$ 8p.

2. (a) Laadi yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kielen

$$L = \{ucvcw \mid u, v, w \in \{0, 1\}^*, v = u^R \text{ tai } v = w^R \text{ (tai molemmat)}\}.$$

(Merkintä x^R tarkoittaa jonon x käänteisjonoa, so. jonoa x takaperin kirjoitettuna.) 5p.

- (b) Osoita, että (a)-kohdassa laatimasi kielioppi on moniselitteinen. 5p.
 (c) Osoita (täsmällisesti!), että (a)-kohdan kieli L ei ole säännöllinen. (Vihje: Tarkastele esimerkiksi muotoa $0^n c 0^n c 1^n$ olevia kielen L jonoja.) 5p.

2. Tarkastellaan kieltä

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w = w^R\},$$

missä merkintä w^R tarkoittaa merkkijonon w käänteismerkkijonoa (esimerkiksi $(abc)^R = cba$).

- (a) Osoita, että kieli L on yhteydetön. 7p.
 (b) Osoita, että kieli L ei ole säännöllinen. 8p.

2. Yhteydetön kieli.

Tarkastellaan kieltä $L = \{a^m b^n \mid m < n\}$.

- (a) Laadi yhteydetön kielioppi, joka generoi kielen L . 8 p.
(b) Osoita, että L ei ole säännöllinen. 7 p.

2. (a) Laadi yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kielen

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ tai } j = k \text{ (tai molemmat)}\}.$$

- (b) Osoita, että (a)-kohdassa laatimasi kielioppi on moniselitteinen. 5 p.
(c) Osoita (täsmällisesti!), että (a)-kohdan kieli L ei ole säännöllinen. 5 p.

2. (a) Laadi yhteydetön kielioppi kielelle

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0, i + j = k\}.$$

- (b) Osoita, että yllämainittu kieli ei ole säännöllinen. 7 p.
8 p.

2. (a) Kuvaile sanallisesti seuraavan kieliopin tuottama kieli: 5 p.

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow ASb \mid \epsilon \\ A &\longrightarrow aA \mid a \end{aligned}$$

- (b) Laadi yksiselitteinen yhteydetön kielioppi, joka kuvaa saman kielen. 5 p.
(c) Osoita yllämainittu kieli epäsäännölliseksi. 5 p.

2. Tarkastellaan oikein sulutettuja kaari- ja hakasuluista muodostettuja merkkijonoja. Esimerkiksi $(\square)\square$ ja $[(\square)]$ ovat oikein sulutettuja merkkijonoja, mutta (\square, \square) ja $]\square[$ eivät ole. Formaalisimmin oikein sulutetut merkkijonot voidaan määritellä induktiivisesti: ϵ on oikein sulutettu merkkijono, ja jos x ja y ovat oikein sulutettuja merkkijonoja, niin myös (x) , $[y]$ ja xy ovat oikein sulutettuja merkkijonoja. Olkoon L oikein sulutettujen merkkijonojen muodostama kieli.

- (a) Laadi yhteydetön kielioppi, joka kuvaa kielen L . 8 p.
(b) Esitä merkkijonojen $(\square)\square$ ja $[(\square)]$ jäsennyyspuut kieliopissasi. 7 p.

3. Tarkastellaan kieltä $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

- (a) Osoita, että L ei ole säännöllinen. 7 p.
(b) Laadi Turingin kone, joka ratkaisee kielen L . Esitä koneesi tilakaavion ja selosta sen toimintaidea sanallisesti. 8 p.

2. Tarkastellaan aakkoston $\{a, b\}$ palindromien kieltä $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w = w^R\}$, missä w^R saadaan w :stä kääntämällä sen merkkien järjestys.

- (a) Esitä yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kielen L . 6 p.
(b) Esitä merkkijonojen ϵ , $abba$ ja aaa jäsennyyspuut kieliopissasi. 3 p.
(c) Osoita, että L ei ole säännöllinen. 6 p.

3. Laadi (yksi- tai useampinauhainen) Turingin kone, joka ratkaisee, onko syöte $w \in \{a, b\}^*$ palindromi, ts. onko $w = w^R$. Esitä koneen laskenta syötteillä abb ja bab . 15p. 4.

3. Laadi yksinauhainen Turingin kone, joka ratkaisee, onko syöte muotoa $a^i cb^i$, missä $i \geq 0$. Esitä koneen laskenta syötteillä $aacbb$ ja $acbb$. 15p.

3. Suunnittele standardimallinen, so. deterministinen ja yksinauhainen Turingin kone, joka tunnistaa kielen

$$L = \{0^n 10^n \mid n \geq 0\}.$$

Kuvaa suunnittelemasi kone tilakaaviona, ja esitä sen laskennat syötteillä 010 ja 0101. 15p.

3. Tarkastellaan kieltä $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w\text:ssä on enemmän nollia kuin ykkösiä}\}$.

- (a) Laadi yksinauhainen Turingin kone, joka ratkaisee kielen L .
Esitä koneesi tilakaaviona ja selosta sen toimintaidea sanallisesti. 10p.
- (b) Esitä laatimasi koneen laskenta syötteillä 011 ja 0100. 5p.

3. Suunnittele standardimallinen (so. deterministinen ja yksinauhainen) Turingin kone, joka tarkastaa, että syöteenä annetussa binäärijonossa on useampia ykkösiä kuin nollia. Kuvaa suunnittelemasi kone tilakaaviona, ja esitä sen hyväksyvä laskenta syötteellä 011 sekä hylkäävä laskenta syötteellä 1010. 15p.

3. (a) Suunnittele standardimallinen (deterministinen ja yksinauhainen) Turingin kone, joka korvaa nauhalla annetun merkkijonon $w \in \{0, 1\}^*$ merkkijonolla ww .
Kuvaa suunnittelemasi kone tilakaaviona ja selosta sen toimintaidea sanallisesti. 10p.
- (b) Esitä laatimasi koneen laskenta syötteillä 0 ja 01. 5p.

3. Laskettava funktio.

Laadi Turingin kone, joka laskee funktion $f(n) = n \bmod 3$. Kone saa syöteenä merkkijonon 1^n ja sen tulee laskennan päätteeksi jättää nauhan alkuun $n \bmod 3$ ykköstä, missä $n \bmod 3$ tarkoittaa jakojäännöstä, kun n jaetaan 3:lla. Muiden ykkösten päälle tulee kirjoittaa merkkiä #.

- (a) Esitä laatimasi Turingin kone tilakaaviona. 6 p.
- (b) Kirjoita yhteenveto koneesi toimintaperiaatteesta. 6 p.
- (c) Esitä koneen laskenta syötteillä 111 ja 11111. 3 p.

3. Tarkastellaan kieltä $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w\text:ssä on enemmän nollia kuin ykkösiä}\}$.

- (a) Laadi yksinauhainen Turingin kone, joka ratkaisee kielen L .
Esitä koneesi tilakaaviona ja selosta sen toimintaidea sanallisesti. 10p.
- (b) Esitä laatimasi koneen laskenta syötteillä 011 ja 0100. 5p.

3. Laadi Turingin kone, joka tunnistaa kielen

$$L = \{w \mid w\text:ssä on yhtä monta } a\text{:ta ja } b\text{:tä}\}.$$

Laatimasi kone voi halutessasi olla moninauhainen. Esitä koneesi tilakaaviona ja kuvaile sen toimintaidea sanallisesti. 15p.

4. (a) Laadi (epädeterministinen) pinoautomaatti, joka tunnistaa edellisen tehtävän kielen L .
Esitä suunnittelemasi automaatin hyväksyvä laskenta syötteellä 010. 5p.
- (b) Osoita, että myös edellä tarkastellun kielen L komplementtikieli

$$\bar{L} = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x \notin L\}$$

on yhteydetön ja voidaan siten tunnistaa epädeterministisellä pinoautomaatilla. 10p.

3. Suunnittele (epädeterministinen) pinoautomaatti, joka tunnistaa tehtävässä 2 tarkastellun kielen L . (Kuvaa automaattisi tilakaaviona.) Esitä suunnittelemasi automaatin hyväksyvät laskennat syötteillä ab ja $abbcc$. 15p.

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ tai } j = k \text{ (tai molemmat)}\}.$$

2. Laadi pinoautomaatti, joka ratkaisee, kuuluuko syöte kieleen $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w = w^R\}$.
Onko automaattisi deterministinen vai epädeterministinen? Esitä koneen laskenta syötteillä ϵ
ja $abba$. 15p.

4. Ratkeavia ongelmia.

- (a) Esitä pääpiirteittäin algoritmi, jolla voi ratkaista, onko annetun säännöllisen lausekkeen r määrittämä kieli $L(r) = \Sigma^*$ jollakin aakkostolla Σ . 8 p.
- (b) Esitä pääpiirteittäin algoritmi, jolla voi ratkaista, määrittävätkö annetut säännölliset lausekkeet r ja s saman kielen, toisin sanoen, onko $L(r) = L(s)$. 7 p.

Vihje: kannattanee tarkastella kielten automaattiesitystä.

4. Toinen seuraavista:

- (a) Perustele väite: jos kieli $L \subseteq \{0, 1\}^*$ on yhteydetön, niin samoin on myös seuraava, kielen L sanojen kaikkien alkuosien muodostama kieli:

$$L_{\text{pref}} = \{x \in \{0, 1\}^* \mid xy \in L \text{ jollakin } y \in \{0, 1\}^*\}.$$

(Vihje: Chomskyn normaalimuodon hyväksikäyttö saattaa helpottaa tehtävää.) 15p.

- (b) Selitä, mitä tarkoitetaan ratkeamattomalla ongelmalla, anna jokin esimerkki tällaisesta ongelmasta ja todista sen ratkeamattomuus. Saat käyttää hyväksesi mitä tahansa luennolla ja luentomonisteissa esitettyjä tuloksia, paitsi sellaisia joissa suoraan sanotaan, että "ongelma P on ratkeamaton". Esittämiesi määritelmien ja perustelujen tulee olla täsmällisiä. 15p.