Aalto-yliopisto Rasila/Korvenpää

Mat-1.1230 peruskurssi S3 Syksy 2012

2. välikoe Ti 20.11.2012 klo 16.00-19.00

Kokeessa saa käyttää ylippilaskirjoituksessa sallittua laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1. Ratkaise Z-muunnosta käyttäen differenssiyhtälö

$$y(n+2) + y(n) = n, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

2. Olkoon $f(t) = \cosh(t)$, kun $-\pi < t < \pi$. Laske funktion $f(t)$ kompleksinen Fourier-sarja (f:n jakso on 2π).

3. a) Määrittele funktion Fourier-muunnos ja Fourier-muunnoksen käänteismuunnos.

b) Osoita derivaatan Fourier-muunnoksen kaava

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\}.$$

4. Laska matriisin $\mathbf{A}$ Cholesky-hajotelma, kun

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix}.$$

Vihje: Seuraavista kaavoista saattaa olla apua tehtävien ratkaisemisessa.

Kaavoja:

Hyperboliset ja trigonometriset funktiot:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Z-muunnokseen liittyviä kaavoja

Jos $A(z) = Z(a_n)$, niin

$$Z(na_n) = -zA'(z),\ Z(c^n a_n) = A(z/c),$$
$$Z(a_{n+1}) = z(A(z) - a_0),\ Z(a_{n+2}) = z^2(A(z) - a_0 - a_1/z).$$

Z-muunnoksia:

(a_n)	$A(z) = Z(a_n)$
(1)	$z/(z-1)$
(n)	$z/(z-1)^2$
(n^2)	$z(z+1)/(z-1)^3$
(α^n)	$z/(z-\alpha)$
$(n\alpha^n)$	$\alpha z/(z-\alpha)^2$
$(\cos(n\pi/2))$	$z^2/(z^2+1)$
$(\sin(n\pi/2))$	$z/(z^2+1)$
$(\sin(n\alpha))$	$z\sin\alpha/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$
$(\cos(n\alpha))$	$z(z-\cos\alpha)/(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)$

Fourier-sarjat:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big[a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\big],$$
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt,$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt,$$
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\omega t}\,dt, \quad \omega = 2\pi/T.$$

S3 Välikokeen 2 malliratkaisut ja arvosteluperusteet

Tehtävä 1

Tehtävänä on ratkaista

$$y(n+2)+y(n)=n.$$

Z-muunnetaan yhtälö puolittain, jolloin annetun kaavan ja muunnosten perusteella saadaan.

$$\begin{aligned}Z(y(n+2))+Z(y(n))&=Z(n)\\ z^2(Y(z)-y(0)-y_1/z)+Y(z)&=\frac{z}{(z-1)^2}\\ (z^2+1)Y(z)&=\frac{z}{(z-1)^2}\end{aligned}$$

Ratkaistaan nyt $Y(z)/z$:n osamurtokehitelmä, jotta voidaan käänteismuuntaa

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}&=\frac{Az+B}{z^2+1}+\frac{C}{z-1}+\frac{D}{(z-1)^2}\\ A(z^3-2z^2+z)+B(z^2-2z+1)+C(z^3-z^2+z-1)+D(z^2+1)&=1\\ \iff&\begin{cases}A+C=0\\ -2A+B-C+D=0\\ A-2B+C=0\\ B-C+D=1\end{cases}\end{aligned}$$

Tästä saadaan ratkaisuksi $A=1/2, B=0, C=-1/2, D=1/2$. Osamurtohajotelma on siis

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z}{2(z^2+1)}-\frac{1}{2(z-1)}+\frac{1}{2(z-1)^2}$$

Nyt voidaan kertoa z:lla ja etsiä käänteismuunnokset taulukosta

$$\begin{aligned}Y(z)&=\frac{z^2}{2(z^2+1)}-\frac{z}{2(z-1)}+\frac{z}{2(z-1)^2}\\ y(n)&=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\end{aligned}$$

Myös Residymenetelmällä ratkaisu on ok. Tehtävän ratkaisemisesta osamurtoa vaativaan tilanteeseen sai 2 pistettä. Osamurrosta / Residylaskusta sai 3 pistettä ja käänteismuunnoksesta 1 piste.

Tehtävä 2

Tehtävänä on laskea $\cosh(t)$:n kompleksinen Fourier-sarja välillä $\pi<t<\pi$. Lasketaan kompleksiset Fourier-kertoimet suoraan määritelmästä

$$\left(\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-1}}{2}\right), \omega = 1$$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t + e^{-t}}{2} e^{-ikt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{t(1-ik)}}{2} + \frac{e^{t(-1-ik)}}{2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{t(1-ik)}}{2(1-ik)} + \frac{e^{t(-1-ik)}}{2(-1-ik)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{\pi(1-ik)} - e^{-\pi(1-ik)}}{2(1-ik)} + \frac{e^{\pi(-1-ik)} - e^{-\pi(-1-ik)}}{2(-1-ik)}\right] \quad ; e^{\pi ik} = (-1)^k \\
&= \frac{(-1)^k}{4\pi}\left[\frac{(1+ik)(e^{\pi} - e^{-\pi}) - (1-ik)(e^{-\pi} - e^{\pi})}{1+k^2}\right] \\
&= \frac{(-1)^k}{4\pi(1+k^2)}\left[2(e^{\pi} - e^{-\pi}\right] = \frac{(-1)^k \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}
\end{aligned}$$

Näin ollen kompleksinen Fourier-sarja on

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)} e^{ikt}.$$

Täysiin pisteisiin ei tarvinnut sieventää aivan näin paljoa, eksponenttifunktio on riitti. Määritelmästä sai yhden pisteen ja täysin oikeasta laskusta 6p, virheistä rokotettiin seuraavasti: -2p jos oli laskettu vain reaalinen (kosinit ja sinit) Fourier-sarja, -2p jos laskussa oli vedottu integraalin parillisuuteen aiheetta ($\cosh(t)$ on parillinen, e^{ikt} ei), pienistä laskuvirhestä -1p.

3. a) $F\{f(t)\} = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ } Fourier-muunnos

$F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ } Käänteismuunnos

- Määritelmät oikein ja yhteensopivia $\boxed{3p.}$
  - vakioiden tulo $\frac{1}{2\pi}$
  - toisessa eksponentti termissä $-i\omega t$ ja toisessa $i\omega t$
  - käänteismuunnoksessa $dt \to d\omega$

  } riippuen lähteestä

- Virheitä edellä mainituista kohdista $\boxed{-1p.}$

---

b) Lausutaan käänteismuunnoksen avulla:

$f(t) = F^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}$

$\frac{\partial}{\partial t} f(t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \frac{\partial}{\partial t} e^{i\omega t} d\omega$ (Koska integraali ei ole muuttujan "t" suhteen, voidaan derivaatta operaattori viedä integraalin sisälle)

$\boxed{1p.}$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) i\omega e^{i\omega t} d\omega = i\omega \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega}$

$f'(t) = i\omega f(t)$

$\Longrightarrow F\{f'(t)\} = i\omega F(f(t))$ $\boxed{2p.}$

□

b) TAI

Muunnoksen määritelmästä

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \quad \boxed{1p.}$$

Osittaisintegrointi

$$= \Big/_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \underbrace{\Big/_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}}_{=0} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \boxed{2p.}$$

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega \mathcal{F}\{f(t)\} \quad \square$$

4. Cholesky hajotelma

$$A = U^* U$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & i \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & & \\ \bar{u}_{12} & \bar{u}_{22} & \\ \bar{u}_{13} & \bar{u}_{23} & \bar{u}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix} \quad \boxed{2p.}$$

$|\bar{u}_{11}|^2 = 2 \Rightarrow \underline{u_{11} = \sqrt{2}}$ (positiivinen ratkaisu valittu)

$\bar{u}_{11} \cdot u_{12} = i \Rightarrow \underline{u_{12} = \frac{i}{\sqrt{2}}}$

$\bar{u}_{11} \cdot u_{13} = 0 \Rightarrow \underline{u_{13} = 0}$

$|u_{12}|^2 + |u_{22}|^2 = 2 \Rightarrow |u_{22}|^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow u_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (pos. ratk. valittu)

$\overbrace{\bar{u}_{12} u_{13}}^{=0} + u_{22} u_{23} = i \Rightarrow \underline{u_{23} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, i}$

$|u_{13}|^2 + |u_{23}|^2 + |u_{33}|^2 = 2 \Rightarrow |u_{33}|^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow u_{33} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (pos. valittu).

$\boxed{2p.}$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \sqrt{3/2} & \\ 0 & -i\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & \sqrt{\frac{2}{3}}\, i \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \boxed{2p.}$$

Jos rivit valittu väärin $\boxed{-1p.}$

Jos ei ole merkannut kompleksikonjugaatin $\boxed{-1p.}$

Laskuvirheistä ei miinus pisteitä