Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Tentti 17.12.2012.

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä erillisiä taulukoita.

1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Määritä hajotelman $A = LU$ matriisit L ja U.
b) Onko matriisilla A Cholesky-hajotelmaa? Perustele vastauksesi!

2. a) Pisteisiin (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) halutaan sovittaa pienimmän neliösumman suora $y = a + bx$. Merkitään $\mathbf{c} = [a, b]^T$, joka on tuntematon. Selitä, miten tämä ongelma johtaa yhtälöryhmään $A\mathbf{c} = \mathbf{y}$, ja muodosta siinä esiintyvä matriisi A.
b) Laske yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu.

3. a) Määritä differentiaaliyhtälöryhmään

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

liittyvän alkuarvotehtävän $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = -2$ ratkaisu.
b) Mikä on tasapainotilan $(0, 0)$ tyyppi ja stabiilisuus?

4. Muunna differentiaaliyhtälö $y'' + y' - y^2 = 0$ ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi ja laske luvun $y(0{,}1)$ approksimaatio käyttämällä Eulerin menetelmää yhdellä askeleella ja alkuarvoilla $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

5. Muodosta seuraavien lausekkeiden Laplace-käänteismuunnokset:

$$\text{a)}\ \frac{s+1}{(s-2)(s+3)}, \quad \text{b)}\ \frac{s}{s^2 + 8s + 20}.$$

6. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö

$$y' + 3y = u(t-2), \quad \text{kun } y(0) = 0.$$

Tässä u on Heavisiden askelfunktio.

Kääntöpuolella Laplace-muunnokseen liittyviä kaavoja.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, muunnos

$$F(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Merkitään $u(t) =$ Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t) =$ Diracin delta-funktio.
Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s).$$

$$\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), \text{ missä } (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = (g * f)(t);$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$