Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Tentti 17.12.2012.

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä erillisiä taulukoita.

1. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
a) Määritä hajotelman $A = LU$ matriisit L ja U.
b) Onko matriisilla A Cholesky-hajotelmaa? Perustele vastauksesi!

2. a) Pisteisiin (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) halutaan sovittaa pienimmän neliösumman suora $y = a + bx$. Merkitään $\mathbf{c} = [a, b]^T$, joka on tuntematon. Selitä, miten tämä ongelma johtaa yhtälöryhmään $A\mathbf{c} = \mathbf{y}$, ja muodosta siinä esiintyvä matriisi A.
b) Laske yhtälöryhmän
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$
pienimmän neliösumman ratkaisu.

3. a) Määritä differentiaaliyhtälöryhmään
$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$
liittyvän alkuarvotehtävän $y_1(0) = 2,\ y_2(0) = -2$ ratkaisu.
b) Mikä on tasapainotilan $(0, 0)$ tyyppi ja stabiilisuus?

4. Muunna differentiaaliyhtälö $y'' + y' - y^2 = 0$ ensimmäisen kertaluvun ryhmäksi ja laske luvun $y(0{,}1)$ approksimaatio käyttämällä Eulerin menetelmää yhdellä askeleella ja alkuarvoilla $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

5. Muodosta seuraavien lausekkeiden Laplace-käänteismuunnokset:
$$\text{a)}\ \frac{s+1}{(s-2)(s+3)}, \quad \text{b)}\ \frac{s}{s^2 + 8s + 20}.$$

6. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö
$$y' + 3y = u(t-2), \quad \text{kun} \quad y(0) = 0.$$
Tässä u on Heavisiden askelfunktio.

Kääntöpuolella Laplace-muunnokseen liittyviä kaavoja.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, muunnos

$$F(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Merkitään $u(t)$ = Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t)$ = Diracin delta-funktio.
Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s).$$

$$\mathcal{L}(f*g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), \text{ missä } (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = (g*f)(t);$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$

KP3-II, TENTTI 17.12.2012 RATKAISUT/PJA

1. a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$?

$\Rightarrow 1 = u_{11}, \ 2 = u_{12}, \ l_{21} u_{11} = 2, \ l_{21} u_{12} + u_{22} = 1$

$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\det A = 1 - 4 = -3 = \lambda_1 \lambda_2 \Rightarrow$ toinen $\lambda < 0 \Rightarrow$ ei pos. def. $\Rightarrow$ EI

---

2 a) $\begin{cases} a + b x_1 = y_1 \\ a + b x_2 = y_2 \\ a + b x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ eli $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}$

b) $A\bar{x} = \bar{b}, \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

PNS: $(A^T A)\bar{x} = A^T \bar{b}$; $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right] (-\tfrac{1}{2}) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right]$

$\Rightarrow y = 2/3, \ x = 2/3 \Rightarrow \hat{x} = [2/3, 2/3]^T$

---

4. a) $\dfrac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \dfrac{3/5}{s-2} + \dfrac{2/5}{s+3} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{-\|-\}(t) = \dfrac{3}{5} e^{2t} + \dfrac{2}{5} e^{-3t}$

b) $\dfrac{s}{s^2 + 8s + 20} = \dfrac{s}{(s+4)^2 + 4} = \dfrac{s+4}{(s^2+4)^2 + 4} - \dfrac{4}{(s^2+4)^2+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-4t} \cos(2t) - 2e^{-4t} \sin(2t)$

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$; ominaisvektorit $\bar{v}_1 = [1,-1]^T$, $\bar{v}_2 = [1,1]^T$

$\Rightarrow$ yleinen ratkaisu $\bar{y}(t) = C_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \bar{y}(0) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow C_2 = 0,\ C_1 = 2 \Rightarrow \bar{y}(t) = \underline{\underline{2e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

b) Epästabiili lähde.

---

4. $y_1 = y,\ y_2 = y' \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y'' = y^2 - y' = y_1^2 - y_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{y}' = \bar{f}(\bar{y}),\ \bar{f}(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1^2 - y_2 \end{bmatrix}}}$$

Euler: $\bar{y}_0 = [1,2]^T$, $\bar{y}_1 = \bar{y}_0 + \Delta t\, \bar{f}(\bar{y}_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0{,}1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}9 \end{bmatrix}}}$

---

6. $y' + 3y = u(t-2) \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) - 0 + 3Y(s) = e^{-2s}/s$

$\Rightarrow Y(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s(s+3)}$. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s+3}\right\}(t) = e^{-3(t-2)} u(t-2)$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t e^{-3(\tau-2)} u(\tau-2)\, d\tau = \begin{cases} 0, & t \le 2 \\ \displaystyle\int_2^t e^{-3\tau+6}\, d\tau = -\frac{1}{3} \Big/_{2}^{t} e^{-3\tau+6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t+6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t+6}\right) u(t-2)}} \quad \text{(TAI OSAMURTOHAJOTELMA)}$$