Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Alestalo/Pulkkinen

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

1. välikoe 22.2.2011 klo 16–19.

Ei laskimia eikä taulukoita.

1. Funktio f on 2π-jaksollinen ja $f(x) = e^{-ix/2}$, kun $-\pi \le x \le \pi$. Määritä funktion f kompleksiset Fourier-kertoimet c_n.

2. a) Selitä lyhyesti, miten 2π-jaksollisen funktion Fourier-kerrointen c_n lauseke johdetaan (formaalisti) käyttämällä funktioiden $e_n(x) = e^{inx}$ ortogonaalisuutta L^2-sisätulon suhteen.
   b) Johda kaava $\widehat{u'(x)}(\xi) = i\xi\hat{u}(\xi)$, kun $u\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja u' ovat sileitä ja L^1-integroituvia.

3. a) Osoita, että differentiaaliyhtälön $u'' + 2u' + u = f(x)$ ratkaisu voidaan kirjoittaa Fourier-puolella muodossa $\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$, kun $f \in L^1(\mathbf{R})$ ja
$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{(1+i\xi)^2}.$$
   b) Määritä funktio $g(x)$ jollakin tavalla ja esitä ratkaisu $u = u(x)$ konvoluution avulla.

4. Tarkastellaan vaimennettua aaltoyhtälöä
$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t = c^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0 \\ u_x(\pi,t) = 0, & t \ge 0 \text{ (huomaa derivaatta!)} \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$
   jossa $0 < \alpha < c/2$. Johda muuttujien separointia käyttämällä muotoa
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha t}(A_n \cos(\beta_n t) + B_n \sin(\beta_n t)) \sin(\lambda_n x)$$
   oleva formaali ratkaisukaava, määritä kertoimien λ_n, β_n lausekkeet sekä kertoimet A_n, B_n funktion f avulla lausuttuina.

Sekalaisia kaavoja:

- $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$, $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n}\hat{f} * \hat{g}$.
- $\hat{h}(\xi) = 1/(a + i\xi)$, kun $h(x) = H(x)e^{-ax}$, $a > 0$ ja
$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$