

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

tentti elokuu 2012

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää ylioppilaskirjoituksissa sallittua laskinta, ei muita apuvälineitä. Kaavoja kääntöpuolella. Koeaika on 4h.

To Do: Valitse 5 tehtävää.

1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 & 8 \\ -4 & 26 & 3 \\ 8 & 3 & 41 \end{bmatrix}$$

- (a) Selitä, miksi matriisi A on positiivisesti definiitti. (Vihje: Gershgorin.)
(b) Määritä matriisin A Cholesky-hajotelma muodossa $A = LL^T$.

2. Ratkaise lineaarinen differentiaaliyhtälösystemi

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

3. Laske matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

singulaariarvot σ_i sekä (vasen- ja oikea-) singulaarivektorit. Esitä tulos singulaarihajotelman muodossa $A = U\Sigma V^T$.

4. (a) Laske matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sarakkeiden virittämän avaruuden ortogonaalinen vektorikanta $\{v_1, v_2, v_3\}$ Gram-Schmidt -ortogonalisoinnilla. Laske myös ortonormeerattu vektorikanta $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(b) Laske A :lle QR-hajotelma. Saatat hyötyä (a)-kohdan tuloksesta.

5. (a) Esitä symmetrinen matriisi $A = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ muodossa $A = PDP^{-1}$. Valitse P siten, että $P^{-1} = P^T$, jos se on mahdollista. (3p.)

b) Funktio $x(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälösystemin $x(t)' = Ax(t)$ alkuehdolla $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Laske vektori $x(1) = ?$ arvo, ts. ratkaisu hetkellä $t = 1$. (2p.)

c) Onko systeemin $x' = Ax$ kriittinen piste lähde, nielu, keskus vai satulapiste? (1p.)

6. (a) Muodosta matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 6 & 13 & 11 \\ 12 & 11 & 26 \end{bmatrix}$$

Cholesky-hajotelma $A = LL^T$. Vaihtoehtoisesti voit muodostaa LU-hajotelman.