

Mat-1.1132 Matematiikan peruskurssi C3-II (5op)

Tentti 17.12.2012

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää laskinta. Koeaika on neljä tuntia.

1. Laske (käsin, välivaiheet näkyviin) matriisin $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit. (6p)
2. Määrittele ja selitä seuraavat käsitteet: a) matriisin diagonalisointi, b) säännöllinen tilaverkko. (Kustakin 3p.)
3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
 - a) Laske e^A . (4p)
 - b) Määritä yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälöryhmälle $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$. (2p)
4. a) Määrittele matriisin $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ singulaariarvohajotelma. (3p)
b) Perustelee laskuin tai geometrisin tulkinnoin miksi $|\det A|$ on matriisin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singulaariarvojen tulo. (3p)
5. Tarkastellaan Markovin matriisia

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Piirrä matriisia vastaava painotettu tilaverkko. (2p)
Piiroksen tulee olla selkeä. Merkitse verkon solmut ja kaaret siten, ettei sekaantumisen vaaraa ole. Vinkki: käytä piirokseen ainakin puolikas sivu ja piirrä verkon kolmas solmu muiden solmujen keskelle.
- b) Miksi matriisia vastaava Markov-prosessi on säännöllinen? (2p)
- c) Laske kääntöpuolen MATLAB-koodin avulla kolmannen tilan tasapainotodennäköisyys ja kerro mitä vastaus tarkoittaa. (2p)

MATLAB-koodia tehtävään 5

```
>> P
```

```
P =
```

```
    0    0.5000    0.5000    0    0
  0.3333    0    0.3333    0.3333    0
  0.2500    0.2500    0    0.2500    0.2500
    0    0.3333    0.3333    0    0.3333
    0    0    0.5000    0.5000    0
```

```
>> [V D]=eig(P')
```

```
V =
```

```
  0.3086    0.5460    0.2673    0.3401    0.4082
  0.4629    0.4493   -0.5345   -0.6199   -0.0000
  0.6172    0.0000    0.5345    0.0000   -0.8165
  0.4629   -0.4493   -0.5345    0.6199    0.0000
  0.3086   -0.5460    0.2673   -0.3401    0.4082
```

```
D =
```

```
  1.0000    0    0    0    0
    0    0.2743    0    0    0
    0    0   -0.1667    0    0
    0    0    0   -0.6076    0
    0    0    0    0   -0.5000
```

```
>> sum(V(:,1))
```

```
ans =
```

```
  2.1602
```