Matematiikka
Aalto-yliopisto

Varpanen

Mat-1.1131 Matematiikan peruskurssi C3-I (5op)

Tentti 22.12.2012

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa saa käyttää laskinta. Koeaika on neljä tuntia.

1. Olkoot $z_1 = -1 + i$ ja $z_2 = 3i$. Laske a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 z_2$ d) z_1/z_2 e) $|z_1|$ f) $\operatorname{Arg} z_2$. (Kustakin 1p.)

2. a) Laske luvun 8 kompleksiset kuutiojuuret. Piirrä kuva. (3p)

   b) Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^3$. Millaiseksi f kuvaa sektorin

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \; : \; |z| \le \frac{3}{2} \text{ ja } \frac{\pi}{6} \le \operatorname{Arg} z \le \frac{\pi}{2} \right\}?$$

   Piirrä kuva. (3p)

3. a) Esitä funktio $f(z) = e^z/(1-z)$ potenssisarjana kiekossa $|z| < 1$. (4p)

   b) Perustele (2p), miksi funktion $f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$ Fourier-muunnos on

$$\widehat{f}(\nu) = \frac{1}{2}\big(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\big).$$

4. Funktiolle $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (\sin z)^2$ saadaan origon ympäristössä potenssisarjaesitys

$$f(z) = \sum_{k=0}^{5} a_k z^k + \mathcal{O}(z^6).$$

   Määritä kertoimet a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ja a_5. (6p)

5. Kehitä funktio $1/z$ Laurent-sarjaksi annuluksessa $D = \{z \in \mathbb{C} \; : \; 1 < |z - i| < \infty\}$. (6p) Vihje: sovella kaavaa

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{1 - \frac{1}{i(z-i)}}.$$

Kaavoja löytyy paperin kääntöpuolelta.

Fourier-muunnos:

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\, dt.$$

Käänteinen Fourier-muunnos:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t}\, d\nu.$$

Sarjakehitelmiä:

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\
\sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} \\
\cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} \\
\frac{1}{1-z} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad (|z| < 1).
\end{aligned}$$

Lisäksi:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\
\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).
\end{aligned}$$