Aalto-yliopisto
Mat-1.1410 Matematiikan peruskurssi P1
Turunen/Päkkilä

Tentti ja välikokeiden uusinnat 10.1.2013 klo 13–17.

Tentti: tehtävät 1,3,5,9,11.

Uusintavälikokeet: Voit yrittää uusia mitä tahansa tehtävää — tuloksista parempi jää voimaan.
Tehtävien numerot viittaavat luentoviikkoon.
Muista, että välikokeilla kurssin läpipääsyyn vaaditaan vähintään 23 yhteispistettä
ja lisäksi jokaisesta välikokeesta vähintään yksi piste!
Tehtävät 1,2,3,4 muodostavat ensimmäisen välikokeen,
tehtävät 5,6,7,8 toisen välikokeen, ja
tehtävät 9,10,11,12 kolmannen välikokeen.

Täytä huolellisesti kaikki vaaditut tiedot jokaiseen vastauspaperiin.
Tehtävissä saa pisteitä myös asiaan liittyvistä kuvista ja matemaattisten käsitteiden määrittelystä.
Ei laskimia, ei taulukoita!

1. a) Kuinka määritellään tason vektorien $x, y \in \mathbb{R}^2$ pistetulo $x \cdot y$ ja normi $\|x\|$?

   b) Todista, että $|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$ jokaisella $x, y \in \mathbb{R}^2$.

2. Olkoon $a = (3, 4, 5)$ ja $z = (2, 6, 9)$.

   a) Etsi pistettä z lähin piste suoralta S, joka kulkee origon $o \in \mathbb{R}^3$ ja pisteen a kautta.

   b) Etsi pistettä z lähin piste tasosta $T = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ a \cdot x = 0\}$.

3. Määritä pienimmät positiiviset kokonaisluvut x_1, x_2, x_3, x_4 etanolin palamisen reaktiokaavassa

$$\overset{2}{x_1}\,\mathbf{C_2H_5OH} + \overset{6}{x_2}\,\mathbf{O_2} \to \overset{4}{x_3}\,\mathbf{CO_2} + \overset{6}{x_4}\,\mathbf{H_2O}.$$

   Ratkaise ongelma matriisimuodossa Gaussin eliminointimenetelmällä.

4. Laske käänteismatriisi $[A]^{-1}$ ja determinantti $\det[A]$ matriisille

$$[A] = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}.$$

5. Laske luku $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, 10^{-k}$ kuuden desimaalin tarkkuudella.

Tehtävät 6–12 paperin toisella puolella!

6. Miten määritellään ja lasketaan puoliympyrän

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \sqrt{1-x^2}\}$$

kaarenpituus janojen ja murtoviivojen avulla? Piirrä tilanteesta myös havainnollistava kuva.

7. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituva ja

$$f(x) \leq f(42)$$

jokaisella $x \in \mathbb{R}$.
Laske derivaatan määritelmän (eli *erotusosamäärän raja-arvon*) avulla derivaatta $f'(42)$.
Piirrä tilanteesta myös havainnollinen kuva.

$f(x) = f^{(x)} \, a(x - x_0)$

8. Olkoon

$$f(x) = \ln(1 + \sin(x/3)\mathrm{e}^{\cos(x/5)-1}),$$

kun $x \in \mathbb{R}$.
Laske funktion f Taylor-polynomi astetta 2 kehityskeskuksessa $x = 0$.

9. Perustele miksi

$$\frac{1}{x+1} \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}$$

kaikilla $x > 0$ (ja piirrä tilanteesta myös kuva!).
Miksi tästä seuraa

$$\mathrm{e}^{x/(x+1)} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \mathrm{e} \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad ?$$

10. Laske a) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ **ja** b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$.

11. Laske avaruuden $\mathbb{R}^3$ 3-säteisen kuulan tilavuus sopivan pyörähdyskappaleen tilavuusintegraalina.
Saat käyttää tietoa, että tason $\mathbb{R}^2$ r-säteisen kiekon pinta-ala on πr^2.

12. a) Etsi jatkuva funktio $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, jolle $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t$.

b) Selitä, kuinka laskisit 10 desimaalin tarkkuudella likiarvon integraalille $\displaystyle\int_0^\infty \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t^4}\,\mathrm{d}t$, jos sinulla on käytössä kynä, paperia ja tietokone (periaate riittää, ei tarvitse kirjoittaa koneen koodia).

Tehtävät 1–5 paperin toisella puolella!