

**Tfy-0.1061 Fysiikka 1**

**Tentti, 24.10.2012**

Hakola, Kurki-Suonio

Kurssin voi suorittaa vaihtoehdon A tai B mukaisesti.

**Vaihtoehto A:** vastaa tehtävään 1 sekä valintasi mukaan **kolmeen muuhun tehtävään**. Kurssiarvosana määrätyy sekä tämän tentin että laskuharjoituspisteiden perusteella.

**Vaihtoehto B:** vastaa **kaikkiin** tehtäviin. Kurssiarvosana määrätyy tämän tentin perusteella.

Kirjoita jokaiseen palauttamaasi paperiin, kumman vaihtoehdon olet valinnut! Mikäli tämä ei käy selvästi ilmi tai vaihtoehdosta A huolimatta vastaat viiteen tehtävään, koe arvostellaan vaihtoehdon B mukaisesti. Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä mitään apumateriaalia. Voit vastata kysymyksiin suomeksi, ruotsiksi tai englanniksi. Huomaa myös kokeen lopussa oleva aputietolista.

**✓ Pakollinen tehtävä** Määritä yleinen ratkaisu lineaariselle differentiaaliyhtälölle

$$-2 \frac{dx}{dt} + x - 4t = 0,$$

missä  $x = x(t)$ . Piirrä  $x(t)$ :n kuvaaja. Miten tilanne muuttuu, jos yhtälö onkin

$$3 \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x - 4t = 0?$$

Piirrä jälleen  $x(t)$ :n kuvaaja. Jos  $x(t)$  kuvailee erään hiukkasen paikkaa ajan funktiona, niin millaisesta liikkeestä kummassakin tapauksessa on kyse? (8p)

2. Yksi kurssin keskeisistä teemoista on kvanttimekanikan ja klassisen fysiikan välinen rajankäynti. Päättele kurssilla oppimiesi tietojen avulla, onko alla annettuja systeemejä tarkasteltava kvanttimekaanisesti vai riittäisikö klassinen fysiikka niiden analysointiin. Perustele kussakin kohdassa vastauksesi huolellisesti! Katso myös koepaperin lopussa olevaa aputietojen listaa.

- Pienen pieni nikkelikuula (halkaisija  $10 \mu\text{m}$ , tiheys  $9 \text{ g/cm}^3$ ), joka putoaa lattialle ja vierii lattialistan rakoon nopeudella  $5 \text{ m/s}$ . (2,5p)
- Elektronin ja sen antihiukkasen positronin muodostama sidottu tila, *positronium* (elinaika  $125 \text{ ps}$ ), jossa hiukkaset kiertävät yhteistä massakeskipistettä. Voit käyttää apunasi Bohrin semiklassista mallia. (2,5p)
- Fuusioreaktorin sisällä oleva, plasmatilaan päätynyt vetypoltoaine (hiukkastiheys  $10^{20} \text{ m}^{-3}$ ) lämpötilassa  $T \approx 10^8 \text{ K}$ . Voit arvioida vetyplasman hiukkasten kineettistä energiasta relatiolla  $K = \frac{3}{2}k_B T$ . (3p)

3. Tämän tehtävän teemana ovat kvanttimekaanisten hiukkasten aalto-ominaisuudet, erityisesti aaltonfunktiot sekä odotusarvot.

- Tarkastellaan kvanttimekaanista hiukkasta, jota kuvailee yksilöllinen paikasta riippuva aaltonfunktio  $\psi(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x)$ , kun  $0 \leq x \leq 1$ , ja  $\psi(x) = 0$  muulloin. Laske hiukkasen paikan odotusarvo  $\langle x \rangle$ . Muista osittaisintegrointi! Katso myös koepaperin lopussa olevaa aputietolistaa. (3p)
- Vetyatomin elektronin aaltonfunktiot ovat paikan suhteeseen aidosti kolmiulotteisia, minkä lisäksi aaltonfunktiot lausutaan tyypillisesti pallokoordinaattien  $r$ ,  $\theta$  ja  $\phi$  avulla. Tarkastellaan nyt erästä vetyatomin aaltonfunktiota  $\psi(r,\theta,\phi) = Ae^{-r/a_0}$ . Määritä  $A$  siten, että aaltonfunktio on oikein normitettu ja laske odotusarvo  $\langle r \rangle$  elektronin etäisyydelle ytimestä. Integrointilelementti on  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ . Katso myös koepaperin lopussa olevaa aputietolistaa. (5p)

4. Muutama viikko sitten uutisoitiin nimeä ”oppikirjamaraton” kantavasta projektista, jossa kirjoitettiin yhden viikonlopuun aikana lukion matematiikan ensimmäisen kurssin oppikirja ja tuotos laitetettiin saman tien julkiseen jakeluun nettiin. Oletetaanpa tämän tarinan innoittamana, että yliopistofyysikasta tehtäisiin samanlainen open access -kirjan ja että sinä olet ilmoittautunut kirjoittamaan opukseen yhden luvun. Valitse aiheeksesi **jompikumpi** alla olevista vaihtoehdosta (kyseessä on luvun työni, jota saat muuttaa mieleesi mukaan dynaamisemmaksi) ja kirjoita siitä **1–2 sivun pituinen luonnos**, jota kehtaa näyttää millekin projektiin osallistuville. Kohdeyleisösi on Aalto-yliopiston ensimmäisen vuoden opiskelijat. Vaihtoehtosi ovat

- Alkuaineiden jaksollinen järjestelmä ja sen selittyminen keskeiskenttäapproksimaation avulla TAI
- Johteen ja puolijohteen erot ja yhtäläisyysdet selitetynä energiatilojen vyörakenteen avulla.

(8p)

5. Tässä tehtävässä keskitymme radioaktiivisiin ytimiin sekä niiden hajoamisiin.

- Ydinreaktorissa säteilytetään metallitankoa, jossa alkaa syntyä tiettyä kiinnostavaa radioisotooppia A nopeudella  $R_p = 100 \text{ s}^{-1}$ . Isotoippi A hajoaa stabiliiksi isotoopiksi B puoliintumisajalla  $T_{1/2,A} = 10 \text{ h}$ . Selvitä miten aineen A määrä  $N_A$  muuttuu ajan funktiona ja piirrä funktion  $N_A(t)$  kuvaaja. Miten tilanne muuttuu, jos säteilytys lopetetaan 15 h kuluttua ja metallitanko otetaan pois reaktorista? Piirrä tässäkin tapauksessa funktion  $N_A(t)$  kuvaaja. (4p)
- Millä eri tavoin isotoippi A voi hajota isotoopiksi B? Mikä tai mitkä näistä tavoista ovat merkittävässä roolissa, jos A:n massaluku on 60 (rauta–nikkeli–koboltti-trio)? (2p)
- Minkälaisen kvanttimekaanisen selityksen antaisit kullekin b)-kohdassa luettelemallesi hajoamistavalle? (2p)

### Aputietoja

Vetyatomin energiatilat

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}, \quad E_0 = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \approx 13,6 \text{ eV}.$$

Bohrin ratojen säteet

$$r_n = n^2 a_0, \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 0,5 \text{ Å}.$$

Luonnonvakioita:

$$h \approx 6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad k_B \approx 1 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}, \quad m_e \approx 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad m_p \approx 2 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad e \approx 2 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \\ \epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}.$$

**Tfy-0.1061 Fysik 1**

**Tentamen, 24.10.2012**

Hakola, Kurki-Suonio

Kursen kan avläggas enligt alternativen A eller B nedan.

**Alternativ A:** besvara **uppgift 1** samt efter eget val **tre andra** uppgifter. Kursvitsordet baserar sig både på denna tentamen och på poäng från räkneövningarna.

**Alternativ B:** besvara **alla** uppgifter. Kursvitsordet baserar sig enbart på denna tentamen.

Skriv på varje konceptark vilket alternativ du har valt! Om det inte klart framgår vilket alternativ du har valt, eller om du, trots att du har valt alternativ A, besvarar alla fem uppgifter, bedöms prestationen enligt alternativ B. I denna tentamen får man inte använda räknemaskiner och inte heller något annat hjälpmaterial. Du kan besvara uppgifterna på finska, svenska eller engelska. Observera att det i slutet av detta provpapper finns en förteckning över information, som kan vara till hjälp vid utförandet av tentamen.

**1. Obligatorisk uppgift** Bestäm den allmänna lösningen till den linjära differentialekvationen

$$-2 \frac{dx}{dt} + x - 4t = 0,$$

där  $x = x(t)$ . Rita grafen av  $x(t)$ . Hur förändras situationen, om vi i stället antar att ekvationen är

$$3 \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x - 4t = 0?$$

Rita igen grafen av  $x(t)$ . Om vi antar att  $x(t)$  beskriver läget av en partikel som en funktion av tiden, hurudan rörelse handlar det då om i de två fallen? (8p)

2. Ett centralt tema i denna kurs är gränsverkan mellan kvantmekanik och klassisk fysik. Bedöm med hjälp av det du har lärt dig under kursen huruvida systemen nedan bör analyseras kvantmekaniskt eller huruvida det räcker med klassisk fysik för att analysera dem. Motivera omsorgsfullt ditt svar för var och en av situationerna! Se även förteckningen över hjälpinformation i slutet av provpappret.

- a) En synnerligen liten nickelkula (diameter  $10 \mu\text{m}$ , densitet  $9 \text{ g/cm}^3$ ), som faller ner på golvet och rullar in i en springa i en golvläst med farten  $5 \text{ m/s}$ . (2,5p)
  - b) Ett bundet tillstånd bestående av en elektron och dess antipartikel positronen, ett så kallat *positronium* (livslängd  $125 \text{ ps}$ ), där partiklarna kretsar runt sin gemensamma tyngdpunkt. Du kan som hjälp använda Bohrs semiklassiska modell. (2,5p)
  - c) Vätebränslet i plasmaform i en fusionsreaktor (partikeltäthet  $10^{20} \text{ m}^{-3}$ ) i en temperatur av  $T \approx 10^8 \text{ K}$ . Du kan uppskatta den kinetiska energin för partiklarna i väteplasman med hjälp av relationen  $K = \frac{3}{2}k_B T$ . (3p)
3. Temat för denna uppgift är kvantmekaniska partiklars vågegenskaper, speciellt vågfunktioner och väntevärden.
- a) Vi betraktar en kvantmekanisk partikel, som beskrivs av en endimensionell vågfunktion med lägesberoende  $\psi(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x)$ , då  $0 \leq x \leq 1$ , och  $\psi(x) = 0$  annars. Beräkna väntevärdet för partikelns läge  $\langle x \rangle$ . Kom ihåg partiell integrering! Se även förteckningen över hjälpinformation i slutet av provpappret. (3p)
  - b) Vågfunktionerna för väteatomens elektron är med avseende på lägeskoordinaterna genuint tredimensionella. Utöver detta uttrycks vågfunktionerna vanligen med hjälp av sfäriska koordinater  $r$ ,  $\theta$  och  $\phi$ . Vi betraktar nu en av väteatomens vågfunktioner  $\psi(r,\theta,\phi) = Ae^{-r/a_0}$ . Bestäm  $A$  så att vågfunktionen är rätt normerad, och beräkna väntevärdet  $\langle r \rangle$  för elektronens avstånd från kärnan. Integrationselementet är  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ . Se även förteckningen över hjälpinformation i slutet av provpappret. (5p)

4. För några veckor sedan förmedlades nyheten om ett projekt kallat ”oppikirjamaraton” (”läroboksmaraton”), i vilket man under ett veckoslut skrev en lärobok för gymnasiets första kurs i matematik. Produktionen lades omgående ut på webben för fri distribution bland allmänheten. Låt oss inspirerade av den här historien anta att man skulle skriva en likadan open access-bok om universitetsfysik och att du har anmält dig villig att skriva ett kapitel av detta verk. Välj som ämne **någotdera** av alternativen nedan (det handlar om ett arbetsnamn för kapitlet, som du efter eget gottfinnande kan ändra till någonting mera dynamiskt) och skriv om det **ett 1–2 sidor långt utkast**, som man täcks visa även för projektets övriga deltagare. Målgruppen är första årets studerande vid Aalto-universitetet. Dina alternativ är

- Grundämnenas periodiska system och hur det kan förklaras utgående från centralfältsapproximationen **ELLER**
- Skillnaderna och likheterna mellan ledare och halvledare förklarade utgående från energinivåernas bandstruktur

(8p)

5. I denna uppgift koncenterar vi oss på radioaktiva kärnor och deras sönderfall.

- I en kärnreaktor upbevaras en metallstång, i vilken det börjar bildas en radioisotop A av intresse i en takt av  $R_p = 100 \text{ s}^{-1}$ . Isotopen A sönderfaller till den stabila isotopen B med en halveringstid  $T_{1/2,A} = 10 \text{ h}$ . Utred hur mängden av ämnet A, d.v.s.  $N_A$ , förändras som en funktion av tiden och rita grafen av funktionen  $N_A(t)$ . Hur förändras situationen, om bestrålningen avslutas efter 15 h och metallstången tas bort från reaktorn? Rita också i detta fall grafen av funktionen  $N_A(t)$ . (4p)
- På vilka olika sätt kan isotop A sönderfalla till isotop B? Vilket eller vilka av dessa sätt att sönderfalla har en betydande roll, om A:s masstal är 60 (järn–nickel–kobolt-trion)? (2p)
- En hurudan kvantmekanisk förklaring skulle du ge för var och ett av de olika sönderfallssätten i b)-delen? (2p)

### Hjälpinformation

Väteatomens energitillstånd

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}, \quad E_0 = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \approx 13,6 \text{ eV}.$$

Bohr-radien (radierna av Bohrs banor)

$$r_n = n^2 a_0, \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 0,5 \text{ Å}.$$

Naturkonstanter:

$$h \approx 6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad k_B \approx 1 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}, \quad m_e \approx 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad m_p \approx 2 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad e \approx 2 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \\ \epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!, \quad \text{när } n \in \mathbb{N}.$$