

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Tentti 2.2.2013.

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä erillisiä taulukoita.

1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Määritä LU -hajotelma matriisille A .
b) Ratkaise **hajotelmaa käyttämällä** yhtälöryhmä $Ax = b$, kun $b = [26, 13]^T$.
2. Osoita, että yhtälöryhmän $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ pienimmän neliösumman ratkaisu on sama kuin vastaavien suorien rajaaman suorakulmion keskipiste.
3. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 + 2y_2 - 12 \\ y_2' = 2y_1 + 4y_2 + 24 \end{cases}$$

yleinen ratkaisu.

4. a) Osoita, että differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} y_1' = y_1 y_2 - y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

tasapainotila $(0, 0)$ on epästabiili.

- b) Totea, että myös Eulerin menetelmällä laskettuna alkutila $y_1(0) = y_2(0) = 0,1$ siirtyy yhdellä aika-askeleella $\Delta t = 0,1$ kauemmaksi tasapainosta.

5. Muodosta seuraavien lausekkeiden Laplace-käänteismuunnokset:

$$\text{a) } \frac{1}{s(s+5)}, \quad \text{b) } \frac{1}{s^2 + 16s + 68}.$$

6. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö

$$y'' + 4y = 8u(t-2), \quad \text{kun } y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Tässä u on Heavisiden askelfunktio.

Kääntöpuolella Laplace-muunnokseen liittyviä kaavoja.

Laplace-muunnoksiin liittyviä kaavoja

Määritelmä: Annettu $f(t)$, muunnos

$$F(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Merkitään $u(t)$ = Heavisiden askelfunktio ja $\delta(t)$ = Diracin delta-funktio.

Pätee:

$$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s).$$

$$\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), \text{ missä } (f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = (g * f)(t);$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s - a), \quad \mathcal{L}\{u(t - a)f(t - a)\}(s) = e^{-as}F(s).$$

Muunnoksia:

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t - a)$	e^{-as}
$u(t - a)$	e^{-as}/s
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s - a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$