Aalto-universitetet

Gripenberg, Pohjonen, Solin

Mat-1.1520 Grundkurs i matematik 2
Mellanförhör 3 16.5.2011

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

1. (6p) Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$y''(t) - 2y'(t) - 8y(t) = 32t, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -10.$$

Lösning: Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 - 2r - 8 = 0,$$

och lösningarna till den är

$$r = 1 \pm \sqrt{1+8} = \begin{cases} 4, \\ -2. \end{cases}$$

Detta betyder att den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y''(t) - 2y'(t) - 8y(t) = 0$ är $y_h = c_1 \mathrm{e}^{4t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t}$. En (partikulär)lösning till den ursprungliga (icke-homogena) ekvationen kan man försöka bestämma som $y_p(t) = A + Bt$. Eftersom $y_p'(t) = B$ och $y_p''(t) = 0$ så får vi då vi sätter in dessa uttryck i ekvationen

$$0 - 2B - 8A - 8Bt = 32t.$$

Eftersom konstanterna och t-termerna skall vara lika på båda sidor så får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -2B - 8A &= 0, \\ -8B &= 32, \end{aligned}$$

Av den andra ekvationen följer att $B = -4$ och då innebär den första att $A = 1$. Partikulärlösningen blir alltså $y_p(t) = 1 - 4t$ och den allmänna lösningen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 \mathrm{e}^{4t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t} + 1 - 4t.$$

Nu är $y'(t) = 4c_1 \mathrm{e}^{4t} - 2c_2 \mathrm{e}^{-2t} - 4$ och då ger initialvillkoren ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -1 &= y(0) = c_1 + c_2 + 1, \\ -10 &= y'(0) = 4c_1 - 2c_2 - 4. \end{aligned}$$

Eftersom $c_1 = -2 - c_2$ enligt den första ekvationen så blir den andra $-10 = -8 - 4c_2 - 2c_2 - 4$ så att $c_2 = -\frac{1}{3}$ och $c_1 = -\frac{5}{3}$. Lösningen är alltså

$$y(t) = -\frac{5}{3}\mathrm{e}^{4t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t} + 1 - 4t.$$

2. (6p) För att lösa differentialekvationen $y'(t) = 1 - ty(t)^2$, $y(0) = 1$ numeriskt kan man använda följande metod (som man kan visa att har felet $O(h^4)$ i ett steg):

$$\begin{aligned} k_1 &= hF(t_n, y_n), \\ k_2 &= hF(t_n + h, y_n + k_1), \\ k_3 &= hF(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{4}k_1 + \tfrac{1}{4}k_2), \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + k_2 + 4k_3), \end{aligned}$$

(a) Räkna ett steg med steglängden $h = 0.2$.
(b) Förklara varför det kan vara en god idé att uppskatta felet genom att räkna ut $\frac{1}{3}|k_1 + k_2 - 2k_3|$.

Lösning: (a) I detta fall är $F(t, y) = 1 - ty^2$, $n = 0$, $t_0 = 0$ och $y_0 = 1$ så att

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.2 \cdot (1 - 0 \cdot 1^2) = 0.2, \\ k_2 &= 0.2 \cdot (1 - (0 + 0.2) \cdot (1 + 0.2)^2) = 0.14240, \\ k_3 &= 0.2 \cdot (1 - (0 + 0.1)(1 + 0.25 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.1424)^2) = 0.17643, \\ y_1 &= 1 + \tfrac{1}{6}(0.2 + 0.14240 + 4 \cdot 0.17643) = 1.1747. \end{aligned}$$

(b) Om man i metoden ovan räknar ut k_1 och k_2 och sedan $\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ så använder man Eulers förbättrade eller Heuns metod, som är alldeles förnuftig och som har ett fel av storleksordningen $O(h^3)$ i ett steg. Nu är

$$\tfrac{1}{3}|k_1 + k_2 - 2k_3| = |\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}|,$$

så man använder alltså metoden att räkna på två olika sätt och använda absolutbeloppet av skillnaden mellan resultaten för att uppskatta felet i y_{n+1}.

---

3. (4p) Beräkna summan $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)(-1)^k}{2^k}$ genom att derivara båda sidorna av ekvationen $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ två gånger, multiplicera med en lämplig potens av x och sedan sätta in ett lämpligt värde för x.

Lösning: När vi deriverar första gången får vi

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1},$$

och när vi deriverar en gång till blir resultatet

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}.$$

Om vi nu multiplicerar med x^2 så blir resultatet

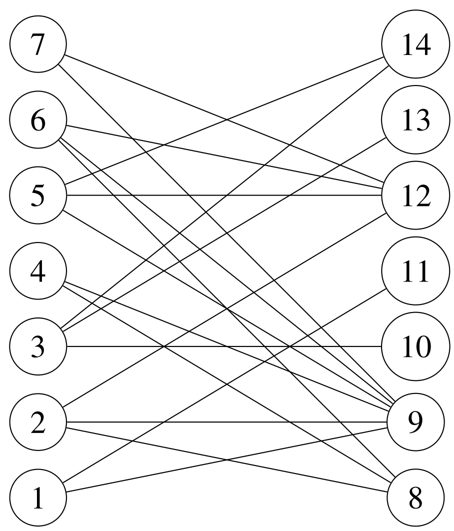
$$\frac{2x^2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k,$$

och genom att välja $x = -\frac{1}{2}$ så får vi

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)(-1)^k}{2^k} = \frac{2(-\frac{1}{2})^2}{(1+\frac{1}{2})^3} = \frac{4}{27}.$$

---

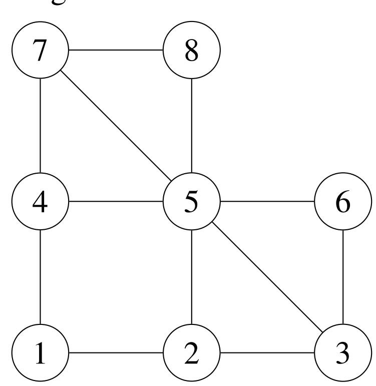
4. (4p) Förklara varför det i grafen nedan inte är möjligt att "matcha" noderna till vänster med noder till höger, dvs. välja en mängd bågar som inte har några gemensamma ändpunkter och så att varje nod till vänster är ändpunkt för precis en av de valda bågarna.



Lösning: Ett tillräckligt och nödvändigt villkor för att det skall finnas en matchning är att för varje delmängd A av noderna till vänster innehåller mängden av de noder till höger som är granne med någon nod i A minst lika många element som A. I detta fall kan vi tex. se att mängden $\{2,4,6,7\}$ har noderna $\{8,9,12\}$ som grannar och denna mängd innehåller en nod mindre än mängden $\{2,4,6,7\}$.

---

5. (4p) Bestäm grannmatrisen för grafen



Om A är grannmatrisen så vilken information om grafen får man med kommandona `B=A^7;` `B(3,5)`?

Lösning: Grannmatrisen A är sådan att $A(j,k) = 1$ om det finns en båge mellan noderna j och k och 0 annars. I detta fall blir grannmatrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementet $(3,5)$ i matrisen A^7 säger hur många olika vägar med längden 7 det finns i grafen från noden 3 till noden 7.
