Aalto-universitetet

Gripenberg, Pohjonen, Solin

Mat-1.1520 Grundkurs i matematik 2
Mellanförhör 2 29.3.2011

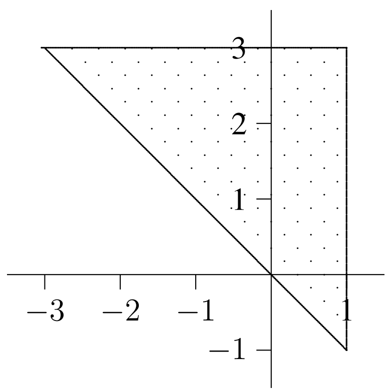
Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

1. (4p) Antag att D är (området innanför) triangeln med hörn i punkterna $(1,-1)$, $(1,3)$ och $(-3,3)$. Bestäm integrationsgränserna då man skriver

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_?^? \left(\int_?^? f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \quad \text{och} \quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_?^? \left(\int_?^? f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Rita en bild!

Lösning: Området D ser ut ungefär såhär:



Av detta ser vi att

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{3} \left(\int_{-y}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$$

och

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_{-3}^{1} \left(\int_{-x}^{3} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

---

2. (4p) Beräkna integralen

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

där $D = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x > 0, \quad y > 0\,\}$ genom att göra variabelbytet $x = 2r\cos(t)$ och $y = r\sin(t)$.

Lösning: Då $x = 2r\cos(t)$ och $y = r\sin(t)$ så är

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2\cos(t) & -2r\sin(t) \\ \sin(t) & r\cos(t) \end{bmatrix}\right) = 2r(\cos(t)^2+\sin(t)^2) = 2r,$$

så att

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t.$$

Dessutom ser vi att $(x, y) \in D$ om och endast om $r > 0$ och $0 < t < \frac{\pi}{2}$ och att $x^2 + 4y^2 = 4r^2\cos(t)^2 + 4r^2\sin(t)^2 = 4r^2$. Därför får vi

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-4r^2}2r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\Big/_0^{\infty} -\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-4r^2}\right)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{4}\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} t = \frac{\pi}{8}.$$

---

3. (4p) Skriv kurvintegralen $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ som en vanlig enkel integral med en variabel då $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + \cos(x + y)\mathbf{j}$ och C är sträckan från punkten $(-2, 3)$ till punkten $(1, -1)$. Du behöver inte räkna ut integralen!

Lösning: Vi kan välja som parameterframställning

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + t(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = (3t-2)\mathbf{i} + (3-4t)\mathbf{j}, \quad t \in [0, 1],$$

så att

$$x(t) = 3t - 2,$$
$$y(t) = 3 - 4t,$$
$$\mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}.$$

Detta innebär att vi får

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_0^1 \Big((3-4t)\mathbf{i} + \cos(3t - 2 + 3 - 4t)\mathbf{j}\Big)\cdot(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 (9 - 12t - 4\cos(1-t))\,\mathrm{d}t.$$

---

4. (4p) Använd Greens teorem för att beräkna kurvintegralen $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ då $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (\frac{1}{2}x^2 + 3x)\mathbf{j}$ och C är kurvan som består av sträckan från $(0, 0)$ till $(2, 0)$, cireklbågen med mittpunkt i $(0, 0)$ i positiv riktning (dvs. i första kvadranten) från $(2, 0)$ till $(0, 2)$ och sträckan från $(0, 2)$ till $(0, 0)$.

Lösning: Vi kan först konstatera att C är randen av området $\{\,(x, y) : x^2+y^2 < 4, x > 0, y > 0\,\}$ (i positiv riktning). Enligt Greens teorem är

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

om $\mathbf{f} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$. I detta fall är $P(x, y) = xy$ och $Q(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$ så att

$$Q_x - P_y = x + 3 - x = 3.$$

Därför är

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \iint_D 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\mathrm{area}(D) = 3\frac{\pi}{4}4 = 3\pi.$$

Obs! I den ursprungliga versionen av uppgiften fanns ett tryckfel (som beaktas i bedömningen) så att $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{j} + (\frac{1}{2}x^2 + 3x)\mathbf{j} = (xy + \frac{1}{2}x^2 + 3x)\mathbf{j}$. I det fallet blir

$Q_x - P_y = y + 3$ och svaret $\iint_D (y+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\pi + \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Den senare integralen blir då $\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} r\sin(\theta) r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big/_0^1 \frac{1}{2}r^2 \Big/_0^{\frac{1}{2}\pi}(-\cos(\theta)) = \frac{1}{2}$.

---

5. (4p) Lös differentialekvationen

$$y'(t) = y(t)^4, \quad t \geq 0, \quad y(0) = -2.$$

Lösning: Funktionen $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ är förstås en lösning men den uppfyller inte villkoret $y(0) = -2$. Därför antar vi att $y(t) \neq 0$ och dividerar båda sidorna med $y(t)$ så att vi får

$$\frac{y'(t)}{y(t)^4} = 1$$

och sedan integrerar. I integralen på vänstra sidan kan vi göra variabelbytet $y(t) = u$ så att $y'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ och vi får

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)^4}\,\mathrm{d}t = \int u^{-4}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}u^{-3} = -\frac{1}{3}y(t)^{-3}.$$

Eftersom $\int a\,\mathrm{d}t = t + c$ så blir resultatet

$$-\frac{1}{3}y(t)^{-3} = t + c.$$

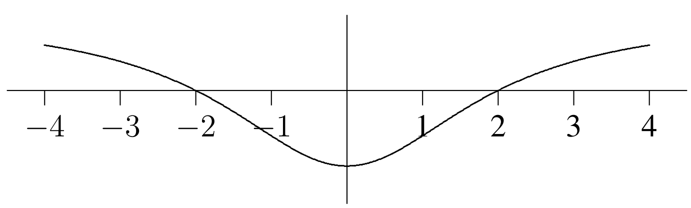
Eftersom $y(0) = -2$ får vi

$$-\frac{1}{3}(-2)^3 = 0 + c \quad \Rightarrow c = \frac{1}{24}.$$

Detta innebär att $y(t) = -\frac{1}{\sqrt[3]{3t+\frac{1}{8}}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{24t+1}}$.

---

6. (2p) Antag att grafen av funkionen f ser ut ungefär såhär



Antag att $y(t)$ är lösningen till ekvationen $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = 0$. Bestäm $\lim_{t\to\infty} y(t)$ och förklara kort hur du resonerat.

Lösning: Av figuren ser vi att $f(y(0)) < 0$ dvs. $y'(0) < 0$ och vi kommer att ha $y'(t) < 0$ så länge som $f(y(t)) < 0$. Detta innebär att $y(t)$ minskar ända tills lösning blir så liten att $f(y(t))$ skulle bli ≥ 0 och det inträffar i punkten -2 så slutsatsen är att $\lim_{t\to\infty} y(t) = -2$.

---

7. (2p) Vad är det man vill (approximativt) räkna ut om man i `matlab/octave` ger kommandona

```
f=@(t,s)sin(t+s)+s.^2;
dblquad(f,2,3,4,5)
```

Lösning: Integralen

$$\int_2^3 \left(\int_4^5 (\sin(t+s) + s^2)\, \mathrm{d}s \right) \, \mathrm{d}t$$
