Gripenberg, Pohjonen, Solin

Mat-1.1520 Grundkurs i matematik 2
Mellanförhör 1 22.2.2011

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

1. (3p) För vilket värde på konstanten c är funktionen $u(x,y,t) = 5\mathrm{e}^{-4t}\cos(2(x+y))$ en lösning till den partiella differentialekvationen

$$u_t(x,y,t) = c\big(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\big)?$$

Lösning: Genom att derivera får vi

$$\begin{aligned}
u_t(x,y,t) &= -4\mathrm{e}^{-4t}\cos(2(x+y)) = -4u(x,y,t),\\
u_x(x,y,t) &= -2\mathrm{e}^{-4t}\sin(2(x+y)),\\
u_{xx}(x,y,t) &= -2\cdot 2\mathrm{e}^{-4t}\cos(2(x+y)) = -4u(x,y,t),\\
u_y(x,y,t) &= -2\mathrm{e}^{-4t}\sin(2(x+y)),\\
u_{yy}(x,y,t) &= -2\cdot 2\mathrm{e}^{-4t}\cos(2(x+y)) = -4u(x,y,t),
\end{aligned}$$

så vi ser att

$$u_t(x,y,t) = -4u(x,y,t) = \frac{1}{2}(-4u(x,y,t) - 4u(x,y,t)) = \frac{1}{2}\big(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)\big),$$

vilket betyder att $c = \frac{1}{2}$.

---

2. (4p) Då man löser y ur ekvationen $x^2y - y^3z + 2xz = 3$ får man en funktion $y(x,z)$ för vilken gäller $y(1,2) = 1$. Bestäm med hjälp av (implicit) derivering en approximation av talet $y(1.1, 1.9)$.

Lösning: Skriv $f(x,y,z) = x^2y - y^3z + 2xz - 3$ så att ekvationen är $f(x,y,z) = 0$. Nu gäller $f(1,1,2) = 0$ så det stämmer faktiskt att $y(1,2) = 1$. Låt nu $\Delta x = 0.1$ och $\Delta z = -0.1$ så att $1 + \Delta x = 1.1$ ja $2 + \Delta z = 1.9$ och vi skall räkna $y(1+\Delta x, 2+\Delta z) = 1 + \Delta y$. Eftersom

$$f(1+\Delta x, 1+\Delta y, 2+\Delta z) - f(1,1,2) = 0$$

så får vi med linjär approximation

$$f_x(1,1,2)\Delta x + f_y(1,1,2)\Delta y + f_z(1,1,2)\Delta z \approx 0.$$

Nu är

$$f_x(x,y,z) = 2xy + 2z,$$
$$f_y(x,y,z) = x^2 - 3y^2z,$$
$$f_z(x,y,z) = -y^3 + 2x,$$

så att $f_x(1,1,2) = 6$, $f_y(x,y,z) = -5$ och $f_z(1,1,2) = 1$ och med hjälp av ekvationen ovan får vi

$$\Delta y \approx -\frac{1}{-5}\big(6 \cdot 0.1 + 1 \cdot (-0.1)\big) = 0.1.$$

Således är $y(1.1, 1.9) \approx 1 + 0.1 = 1.1$.

---

3. (6p) Förklara hur man med hjälp av Newtons metod approximativt kan lösa ekvationssystemet

$$x^2y + x + y^2 = 2,$$
$$(x+y)y + x^2y^2 = 1.$$

Räkna antingen en iteration med startvärdena $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ **eller** förklara med vilka kommandon man kan räkna (många) iterationer med tex. `matlab/octave`. Varför är det inte en god idé att välja $x_0 = y_0 = 0$ som startvärden?

Lösning: Vi skriver

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x^2y + x + y^2 - 2 \\ (x+y)y + x^2y^2 - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

och då är

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2xy + 1 & x^2 + 2y \\ y + 2xy^2 & x + 2y + 2x^2y \end{bmatrix}.$$

Nu skall vi räkna

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

och vi får

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Om vi fortsätter får vi

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1.24727 \\ 0.42604 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1.27253 \\ 0.42094 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1.28248 \\ 0.41851 \end{bmatrix}.$$

I `matlab/octave` kan vi definiera funktionerna med

```
f=\@(X)[X(1)*X(2)+X(1)+X(2)^2-2; (X(1)+X(2))*X(2)+X(1)^2*X(2)^2-1]
df=\@(X)[2*X(1)*X(2)+1,X(1)^2+2*X(2); ...
     X(2)+2*X(1)*X(2)^2,X(1)+2*X(2)+2*X(1)^2*X(2)];
```

sedan ge starvärdet med `X=[1;1]` och räkna iterationerna genom att upprepa kommandot `X=X - inv(df(X))*f(X)`.

Om man som startvärde väljer $x_0 = y_0 = 0$ så är $f'(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och denhär matrisen är inte inverterbar så man kan inte räkna ut $\mathbf{x}_1$.

---

4. (3p) Om $f(x,y)) = xy(1-x-y)$ så finns dess derivatas (gradients) nollställen bland punkterna $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ och $(1,0)$. Vilka är derivatans nollställen?

Lösning: Derivatans nollställen uppfyller ekvationerna:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y(1-x-y) - xy = 0,\\ f_y(x,y) &= x(1-x-y) - xy = 0. \end{aligned}$$

Nu kan vi se att

$$\begin{aligned} &f_x(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) = f_x(0,0) = f_x(0,1) = f_x(1,0) = 0,\\ &f_y(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) = f_y(0,0) = f_y(0,1) = f_y(0,-1) = f_y(1,0) = 0, \end{aligned}$$

medan $f_x(0,-1) = -2 \neq 0$ så alla av punkterna utom $(0,-1)$ är derivatans nollställen.

---

5. (3p) Bestäm det största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = xy(1-x-y)$ i mängden $\{\,(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2x\,\}$ dvs. triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,2)$. Använd de resultat som getts i uppgift 4. (Men du behöver inte ha räknat den uppgiften för att göra detta!)

Lösning: Av de punkter som gavs i uppgift 4 ligger endast $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ inne i triangeln, resten antingen utanför eller på randen så de som ligger på randen kommer att tas i beaktande om vi räknar största värdet på randen.

Först studerar vi sträckan från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,0)$ på vilken $y = 0$ och $0 \leq x \leq 1$. Eftersom $f(x,0) = 0$ så uppnås det största och minsta värdet i tex. punkten $(0,0)$.

På sträckan från punkten $(1,0)$ till punkten $(1,2)$ är $x = 1$ och $0 \leq y \leq 2$ och vi skall bestämma största och minsta värdet av funktionen $g(y) = f(1,y) = y(-y) = -y^2$. Det största värdet av denhär funktionen uppnås då $y = 0$ och det minsta då minsta då $y = 2$, så vi skall ta med i beaktande punkterna $(1,0)$ och $(1,2)$.

På sträckan från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,2)$ är $1 \leq x \leq 1$ och $y = 2x$ så vi skall bestämma största och minsta värdet av funktionen

$$h(x) = f(x,2x) = 2x^2(1-x-2x) = 2x^2 - 6x^3.$$

Derivatan av denhär funktionen är 0 då $h'(x) = 4x - 18x^2 = 0$ av vilket följer att $x = 0$ eller $x = \frac{2}{9}$. Det största och minsta värdet på denhär sträckan uppnås alltså i någon av punkterna $(0,0)$, $(\frac{2}{9},\frac{4}{9})$ eller $(1,2)$. Till slut räknar vi funktionens värden i de punkter som är potentiella extremvärdespunkter:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{27},\\ f(0,0) &= 0,\\ f(1,0) &= 0,\\ f(1,2) &= -4,\\ f\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right) &= \frac{8}{243}. \end{aligned}$$

Av detta drar vi slutsatsen att det största värdet $\frac{1}{27}$ uppnås i punkten $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ och det minsta -4 i punkten $(1, 2)$.

---

6. (5p) Bestäm maximivärdet av funktionen $2x + y$ då $2x^2 + y^2 = 9$ genom att använda en Lagrange multiplikator. Hur kan man veta att man verkligen hittat det största värdet?

Lösning: Låt

$$L(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(2x^2 + y^2 - 9).$$

Av villkoret $L' = 0$ får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2 + 4x\lambda &= 0 \\ 1 + 2y\lambda &= 0 \\ 2x^2 + y^2 - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Av de två första ekvationerna följer då att $x\lambda = y\lambda$ och sedan $x = y$ (för om $\lambda = 0$ så är $4x\lambda = 0 \neq -2$). Av den tredje ekvationen följer då att $3x^2 = 9$ dvs. $x = y = \pm\sqrt{3}$. Om $x = y = \sqrt{3}$ så är $2x + y = 3\sqrt{3}$ och om $x = y = -\sqrt{3}$ så är $2x + y = -3\sqrt{3}$. Funktionerna $f(x, y) = 2x + y$ och $g(x, y) = (2x^2 + y^2 - 9$ är kontinuerligt deriverbara och derivatan $\begin{bmatrix} 4x & 2y \end{bmatrix}$ av g är noll endast i origo som inte ligger på kurvan $g(x, y) = 0$. Dessutom är mängden $\{\, (x, y) : 2x^2 + y^2 = 9 \,\}$ sluten och begränsad (den är en ellips) så att den kontinuerlig funktionen f uppnår sitt största och minsta värde i Lagrange funktionens derivatas nollpunkter. Det största värdet är alltså $3\sqrt{3}$ och det uppnås i punkten $x = y = \sqrt{3}$.
