Aalto-universitetet

Gripenberg, Blomqvist, Norén

Mat-1.1520 Grundkurs i matematik 2
Mellanförhör 1, 21.2.2013

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
Räknare eller tabeller får **inte** *användas i detta prov!*

1. (5p) Antag att z kan beräknas med formeln $z = \dfrac{5x^2}{7y^3}$. Uppskatta med hjälp av linjär approximation med hur många % z förändras om x växer med 0.2% och y växer med 0.3%.

Lösning: Om $f(x,y) = \frac{5x^2}{7y^3}$ så är $f_x(x,y) = \dfrac{5 \cdot 2 \cdot x}{7y^3}$ och $f_y(x,y) = \frac{(-3)\cdot 5\cdot x^2}{7y^4}$ så att man med linjär approximation får

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{f(x,y)} \approx \frac{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}{f(x,y)}$$
$$= \frac{\frac{5\cdot 2x}{7y^3}\Delta x}{\frac{5x^2}{7y^3}} + \frac{\frac{(-3)\cdot 5\cdot x^2}{7y^4}\Delta y}{\frac{5x^2}{7y^3}} = 2\frac{\Delta x}{x} - 3\frac{\Delta y}{y}.$$

enligt antagandet är $\frac{\Delta x}{x} = 0.002$ och $\frac{\Delta y}{y} = 0.003$ så att

$$\frac{\Delta z}{z} \approx 2 \cdot 0.002 + (-3)\cdot 0.003 = -0.005.$$

Detta innebär att z minskar med ca. 0.5%.

---

2. (4p) Beträffande funktionen g vet man att $g(1,2) = -3$, $g(1.1, 2.2) = -3.3$ och $g(0.7, 1.9) = -3.1$. Bestäm en approximation av talet $g(1.2, 1.9)$ genom att använda derivator.

Lösning: Med hjälp av linjär approximering får man

$$g(x+\Delta x, y+\Delta y) - g(x,y) \approx g_x(x,y)\Delta x + g_y(x,y)\Delta y.$$

Nu väljer vi $x = 1$ och $y = 2$, skriver $a = g_x(1,2)$ och $b = g_y(1,2)$ och väljer först $\Delta x = 0.1$ och $\Delta y = 0.2$ och sedan $\Delta x = -0.3$ ja $\Delta y = -0.1$. Då får vi

$$-3.3 - (-3) \approx a \cdot 0.1 + b \cdot 0.2,$$
$$-3.1 - (-3) \approx a \cdot (-0.3) + b \cdot (-0.1),$$

dvs.

$$-3 \approx a + 2b,$$
$$-1 \approx -3a - b.$$

När vi löser detta ekvationssystem får vi $a \approx 1$ ja $b \approx -2$. Därför får vi igen med hjälp av linjär approximation

$$g(1.2, 1.9) = g(1+0.2, 2-0.1) \approx g(1,2) + g_x(1,2)\cdot 0.2 + g_y(1,2)\cdot(-0,1)$$
$$\approx -3 + 1\cdot 0.2 + (-2)\cdot(-0.1) = -3 + 0.2 + 0.2 = -2.6.$$

---

3. (5p) Förklara hur man med Newton-Raphsons metod approximativt kan lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned} y^2 &= x + 1, \\ x^2 &= y + 2. \end{aligned}$$

Räkna antingen en iteration med startvärdena $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ **eller** förklara med vilka kommandon man kan räkna (många) iterationer med tex. `matlab/octave`.

Lösning: Skriv

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y^2 - x - 1 \\ x^2 - y - 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

så att

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 2y \\ 2x & -1 \end{bmatrix}.$$

Nu skall vi räkna ut

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

och vi får

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

För att räkna detta med `matlab/octave` kan vi tex. ge kommandona

```
f=@(X)[X(2)^2-X(1)-1;X(1)^2-X(2)-2]
df=@(X)[-1,2*X(2);2*X(1),-1]
X=[1;1]
```

och sedan upprepa kommandot

```
X=X-df(X)\f(X)
```

Detta ger följande resultat:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2.0496 \\ 1.8202 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1.9311 \\ 1.7153 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1.9263 \\ 1.7107 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 1.9263 \\ 1.7106 \end{bmatrix}.$$

---

4. (5p) Antag att $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$. Vilka av punkterna $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ och $(-1,0)$ är nollställen för derivatan (gradienten) av f och vilka av dessa är lokala maximipunkter och vilka är lokala minimipunkter. Motivera ditt svar!

Lösning: Eftersom

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3 - 3x^2 - 3y^2, \\ f_y(x,y) &= -6xy, \end{aligned}$$

ser vi att $f_x(1,0) = f_y(1,0) = f_x(0,1) = f_y(0,1) = f_x(-1,0) = f_y(-1,0) = 0$ medan $f_x(1,1) \neq 0$ så att $(1,0)$, $(0,1)$ och $(-1,0)$ är nollställen för derivatan medan $(1,1)$ inte är det.

Den andra derivatan är

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix},$$

så att

$$f''(1,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad f''(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(-1,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Eftersom egenvärdena för en diagonalmatris är elementen på diagonalen har $f''(1,0)$ negativa och $f''(-1,0)$ positiva egenvärden vilket betyder att $(1,0)$ är en lokal maximipunkt och $(-1,0)$ en lokal minimipunkt. Däremot är $\det(f''(0,1)) = -36 < 0$, vilket innebär, eftersom determinanten är produkten av egenvärdena att dessa har olika tecken och $(0,1)$ är därför en sadelpunkt och inte en lokal extremvärdespunkt.

---

5. (5p) Förklara hur man skall gå tillväga för att bestämma koefficienterna c_1, c_2 och c_3 så att kvadratsumman $\sum_{j=1}^{n}\bigl(c_1\mathrm{e}^{-x_j} + c_2 + c_3\mathrm{e}^{x_j} - y_j\bigr)^2$ blir så liten som möjligt då punkterna (x_j, y_j), $j = 1, \ldots, n$, är givna.

Lösning: Låt

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-x_1} & 1 & \mathrm{e}^{x_1} \\ \mathrm{e}^{-x_2} & 1 & \mathrm{e}^{x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{e}^{-x_n} & 1 & \mathrm{e}^{x_n} \end{bmatrix}.$$

Då blir uttrycket som skall minimeras $\|AC - Y\|^2$ och minimivärdet fås (om man antar att åtminstone 3 av punkterna x_j är olika) då man väljer

$$C = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}Y.$$
