Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

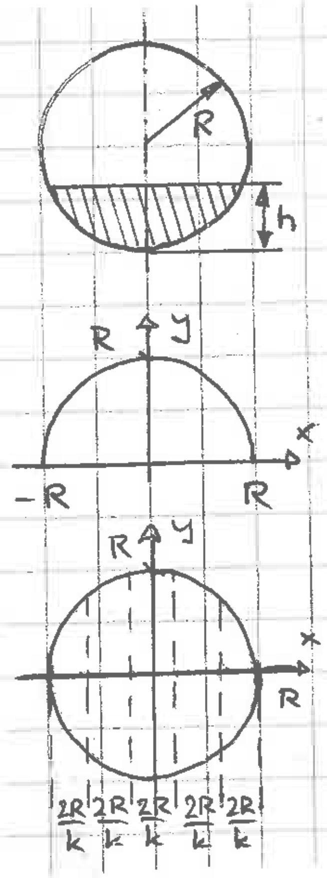
Metsalo

Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 1, 2012-02-23

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!



1. Då ett klot skäres med ett plan, uppstår två sfäriska kalotter. Visa att volymen hos en sfärisk kalott med höjden h, skuren från ett klot med radien R, är $V = \pi h^2(R - h/3)$ (se den övre figuren).

2. a) Då halvcirkelbågen $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ i den mittersta figuren roterar kring x-axeln, uppstår en sfär med radien R. Dess area är som bekant $A = 4\pi R^2$. Bekräfta detta genom att beräkna sfärens area med hjälp av en lämplig integral.
   b) Visa att om sfären skäres i k stycken lika tjocka skivor, kommer varje skiva att ha samma area, nämligen $4\pi R^2/k$.

3. a) Bestäm konvergensradien R hos potensserien
   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^k = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots$.
   b) Bestäm en övre och en undre gräns för summan av talserien
   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 1^k = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots$. Gränserna får vara grova, men skall vara motiverade.
   c) Dito för summan av talserien
   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (-1)^k = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots$

4. Rymdkurvan $\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ligger på konytan $x^2 + y^2 = z^2$ och kallas för en *konisk helix*.
   a) Tangentlinjen till den koniska helixen i punkten $(x, y, z) = (-\pi, 0, \pi)$ skär y-axeln. I vilken punkt på y-axeln gör den det?
   b) Beräkna båglängden hos den koniska helixen från origo till punkten, som svarar mot t-värdet 2π.

Nyttiga (?) formler:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
$\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1, \cos^2\phi = (1 + \cos(2\phi))/2, \sin^2\phi = (1 - \cos(2\phi))/2$.
$\int \sqrt{t^2 \pm a^2}dt = \frac{t}{2} \cdot \sqrt{t^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln(t + \sqrt{t^2 \pm a^2}) + C$.