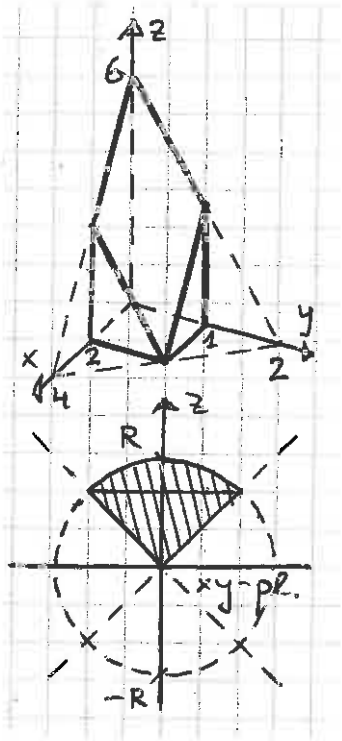
Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper Metsalo

Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

Mellanförhör nr 3, 14.5.2012

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!
Observera, att olika deluppgifter kan ge olika antal poäng.



1. Hexaedern (sexsidingen) i den övre figuren till höger begränsas av koordinatplanen, planen $x = 2$ och $y = 1$ samt planet, som går genom punkterna (4,0,0), (0,2,0) och (0,0,6), så dess volym är 6. I punkten (x, y, z) har hexaedern densiteten $\delta(x, y, z) = xy$, så $\delta_{min} = 0$ (längs xz- och yz-planen) och $\delta_{max} = 2$ (i punkten (2,1,0)). Beräkna hexaederns massa. (6p.)

2. Sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ och den räta cirkulära konen $x^2 + y^2 = z^2$ begränsar en glasstrutsformad kropp W i övre halvrummet $z \geq 0$. I den nedre figuren till höger syns ett tvärsnitt av kroppen genom symmetriaxeln (z-axeln).
a) Beräkna kroppens volym $V = \iiint_W dV$. (Kontroll: $V < \frac{1}{6} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$, eftersom sex glasstrutar ryms i sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ och det blir lite utrymme över.) (3p.)
b) På grund av symmetri finns kroppens tyngdpunkt på z-axeln. Beräkna tyngdpunktens z-koordinat $\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_W z \cdot dV$. (3p.)
(Gott råd: Pga. kroppens form kan cylindriska eller sfäriska koordinater vara lämpliga.)

3. $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\jmath}$, då $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
a) Visa att $div(\vec{F}) = \nabla \bullet \vec{F} \equiv 0$ i $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. (2p.)
b) Visa att $rot(\vec{F}) = curl(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} \equiv \vec{0}$ i $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. (2p.)
c) Beräkna $\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$, då C är enhetscirkeln i xy-planet genomlupen ett varv moturs. (2p.)

4. a) Den linjära, homogena differentialekvationen (A): $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$ har konstanta koefficienter, så ansatsen $y(x) = e^{rx}$ ger en lösning $y_1(x)$, om vi väljer ett lämpligt värde på konstanten r. Bestäm r så att $y_1(x) = e^{rx}$ är en lösning till (A). (1p.)
b) (A) har också en annan, linjärt oberoende lösning $y_2(x)$, som fås via ansatsen $y_2(x) = c(x) \cdot y_1(x)$. Insatt i (A) ger denna ansats en 1:a ordningens differentialekvation för $c'(x)$. Lös denna differentialekvation och bestäm allmänna lösningen $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ till (A). (2p.)
c) Den linjära, inhomogena differentialekvationen (B): $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x^2 + 1$ har en partikulärlösning i form av ett 2:a-gradspolynom. Bestäm denna partikulärlösning. (1p.)
d) Bestäm lösningen till (B), som satisfierar begynnelsevillkoren $y(0) = 0, y'(0) = 0$. (2p.)
(Gott råd: Det är enkelt att kontrollera lösningen mha. insättning.)

I morgon är det tisdag. Då kan detta mellanförhör diskuteras på TCGD:s möte på TF.
Tack för den gångna terminen. Ha en trevlig sommar! Georg M.