Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper Metsalo

Mat-1.1520 Svenskspråkig grundkurs i matematik 2

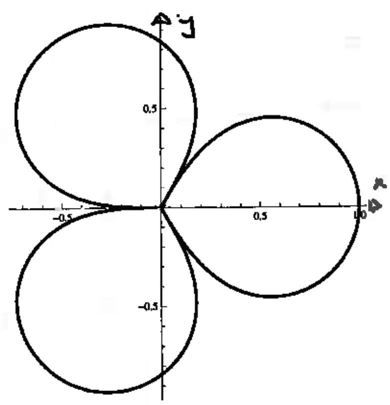
Turbotentamen 31.5.2012

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

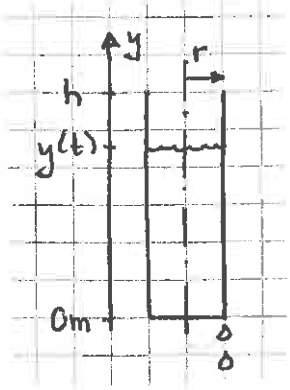
Det går att ANTINGEN skriva sluttentamen ELLER skriva ETT mellanförhör. För mellanförhör har man 3 timmar på sig, medan för sluttentamen har man 4 timmar. På sluttentamen räknas I- och Stack-poängen inte längre tillgodo.

Vid denna turbotentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Om ni misstänker att det förekommer något tryckfel, fråga! Förenkla lämpligast svaren. Lämna t.ex inte uttryck på formen $\sqrt{9}$ eller $\cos 0$, utan skriv i stället 3 resp. 1. På baksidan finns en del FORMLER givna.

MELLANFÖRHÖR 1 omfattar uppgifterna 1, 2 och 3.
MELLANFÖRHÖR 2 omfattar uppgifterna 4, 5 och 6.
MELLANFÖRHÖR 3 omfattar uppgifterna 7, 8 och 9.
SLUTTENTAMEN omfattar uppgifterna 2, 3, 4, 6 och 10.



1. Kurvan $r(\theta) = ((1+\cos(3\theta))/2)^{1/4}$ på polär form ger treklövern i den övre figuren till höger. Beräkna den sammanlagda arean hos de tre klöverbladen. (Utnyttja symmetrin.)
2. a) Visa att den positiva talserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n!}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{1}} + \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{6}} + \frac{16}{\sqrt{24}} + \ldots$ konvergerar. (2p.)
   b) Eftersom det rör sig om en konvergent positiv talserie, är 0 naturligtvis en undre gräns för seriens summa. Bestäm någon övre gräns för seriens summa. Gränsen får gärna vara grov, men skall vara motiverad. (4p.)
3. Då en tank tömmes under inverkan av gravitationen, satisfierar vätskedjupet $y(t)$ differentialekvationen $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = A(y) \cdot \frac{dy}{dt} = -k \cdot \sqrt{y(t)}$, där $A(y)$ är tankens tvärsnittsarea vid vätskedjupet y och k är en positiv proportionalitetskonstant.
   En tank på formen av en rät cirkulär cylinder med radien r och höjden h fylls med vatten. Tanken tömmes på tiden $T = 10min$ genom ett litet hål i bottnet. Visa att det tar mindre än $3min$ innan tanken tömts till hälften.



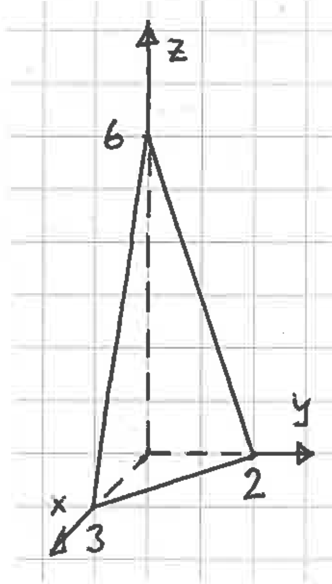
4. Två ytor säges skära varandra vinkelrätt i en punkt, om deras normalvektorer är vinkelräta i punkten. I vilka punkter skär den hyperboliska paraboloiden (sadelytan) $f(x,y,z) = xy - z = 0$ och den elliptiska paraboloiden $g(x,y,z) = 3y^2 + z^2 - x = 0$ varandra vinkelrätt?
5. Antag att $g(u,v)$ är av klass $C^2(\mathbf{R}^2)$ och harmonisk, så $\partial^2 g/\partial u^2 + \partial^2 g/\partial v^2 = 0$ i hela uv-planet. Låt $h(x,y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$. Då är även $h(x,y)$ av klass $C^2(\mathbf{R}^2)$. Visa att h är också harmonisk, dvs. visa att $\partial^2 h/\partial x^2 + \partial^2 h/\partial y^2 = 0$ i hela xy-planet.
6. Bestäm maximala volymen hos ett rätblock, som ryms i tetraedern med hörnen $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,2,0)$ och $(0,0,6)$ så att tre av rätblockets sidor sammanfaller med koordinatplanen. (Se figuren vid uppgift 9 på baksidan.)

Fortsättning och en del formler på baksidan.

7. a) Vid en variabelsubstitution $\vec{r}(u,v,w) = x(u,v,w)\vec{\imath} + y(u,v,w)\vec{\jmath} + z(u,v,w)\vec{k}$ i en trippelintegral ersätts volymselementet $dV = dxdydz$ som bekant med $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|dudvdw$, där $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ är transformationens Jacobian och kan ses som en förstoringsfaktor.
Visa att vid övergång till sfäriska koordinater ρ, ϕ och θ via
$x(\rho,\phi,\theta) = \rho\sin\phi\cos\theta, y(\rho,\phi,\theta) = \rho\sin\phi\sin\theta, z(\rho,\phi,\theta) = \rho\cos\phi$
blir Jacobianen $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2\sin\phi$. (Därför ersätts $dV = dxdydz$ inte med $d\rho d\phi d\theta$ utan med $\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$ vid övergång till sfäriska koordinater.)
b) Använd sfäriska koordinater till att beräkna $\iiint_W xyz^2 dxdydz$,
där $W = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x,y \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ är en fjärdedel av enhetsklotet.

8. $\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$, dvs. *nabla* (eller *del*, som den också kallas), är inte en vektor i vanlig bemärkelse, trots att den har en $\vec{\imath}$-"komponent", en $\vec{\jmath}$-"komponent" och en $\vec{k}$-"komponent". Det är en *differentieringsoperator*, så räkneregler som gäller för vanliga vektorer behöver inte gälla för ∇.
a) För vektorer $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ gäller det att $\vec{b} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. Ge ett exempel på ett vektorfält $\vec{F}(x,y,z)$ av klass $C^1(\mathbf{R}^3)$ sådant att $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F}) = \vec{F} \bullet (rot(\vec{F})) = \vec{F} \bullet (curl(\vec{F})) \not\equiv 0$ (inte identiskt lika med 0; det gör inget om $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F}) = 0$ i somliga punkter). Beräkna också $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F})$ i någon punkt, där $\vec{F} \bullet (\nabla \times \vec{F}) \neq 0$.
b) För vektorer $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ gäller det att $\vec{a} \bullet (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. Visa att för alla vektorfält $\vec{G}(x,y,z)$ av klass $C^2(\mathbf{R}^3)$ gäller att $\nabla \bullet (\nabla \times \vec{F}) = div(rot(\vec{F})) = div(curl(\vec{F})) \equiv 0$ (identiskt lika med 0). Ibland kan alltså en räkneregel, som gäller för vanliga vektorer, *till synes* ha en motsvarighet för ∇.

9. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\partial V} \vec{F} \bullet \vec{N} dS$, där vektorfältet $\vec{F}(x,y,z) = 3x\vec{\imath} + 4z\vec{k}$, V är tetraedern i figuren till höger med hörnen $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,2,0)$ och $(0,0,6)$ och $\vec{N}$ är utåtriktade enhetsnormalen på tetraederns slutna begränsningsyta ∂V
a) genom att omvandla den till en volymsintegral med hjälp av divergenssatsen (Gauss' sats),
b) direkt som en ytintegral.



10. Låt $a > 0$. Beräkna volymen hos området, som finns innanför den räta cirkulära cylindern $x^2+y^2 = 2ay$ och sfären $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$. Gott råd: pga. kroppens form kan polära/cylindriska koordinater vara lämpliga.

Nyttiga (?) formler:
$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \cos^2 t = (1+\cos(2t))/2, \sin^2 t = (1-\cos(2t))/2$

Ha en trevlig sommar och tack för den gångna terminen! Georg M.