Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper Metsalo

Mat-1.1532 Svenskspråkig grundkurs i matematik 3-II

Tentamen 16.5.2012

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga, om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Observera, att olika (del-)uppgifter kan ge olika antal poäng.

1. En reell, inverterbar kvadratisk matris Q säges vara *ortogonal*, om $Q^TQ = I$.
   a) Visa att om Q är en ortogonal $n \times n$-matris, så är dess kolumnvektorer parvis ortogonala enhetsvektorer (därav namnet). (1p.)
   b) Visa att om $n \times n$-matrisen Q:s radvektorer är parvis ortogonala enhetsvektorer, så är Q en ortogonal matris. (1p.)
   c) Visa att om Q är en ortogonal $n \times n$-matris, så är $\det(Q) = \pm 1$. (1p.)
   d) Visa att multiplikation med en ortogonal $n \times n$-matris bevarar skalärprodukten i $\mathbf{R}^n$, dvs. att om $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^n$, Q är en ortogonal $n \times n$-matris och $\vec{u}' = Q\vec{u}, \vec{v}' = Q\vec{v}$, så är $\vec{u}' \bullet \vec{v}' = \vec{u} \bullet \vec{v}$. (1p.) (Detta medför att multiplikation med en ortogonal $n \times n$-matris även bevarar *geometrin* i $\mathbf{R}^n$, eftersom avstånd och vinklar i $\mathbf{R}^n$ fås mha. skalärprodukten.)
   e) Visa att om λ är ett egenvärde till den ortogonala $n \times n$-matrisen Q, så är $|\lambda| = 1$. (1p.)

2. a) I planet ges Laplace-operatorn ∇^2 av $(\nabla^2(f))(x,y) = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2$ i rektangulära koordinater, medan i polära koordinater ges den av
   $(\nabla^2(g))(r,\theta) = \partial^2 g/\partial r^2 + \frac{1}{r}\partial g/\partial r + \frac{1}{r^2}\partial^2 g/\partial\theta^2$.
   Bestäm alla harmoniska funktioner g i $\mathbf{R}^2$, som bara beror på avståndet från origo, dvs. så att $g(r,\theta) = g(r), \nabla^2 g \equiv 0$. (3p.)
   b) I rummet ges Laplace-operatorn ∇^2 av $(\nabla^2(f))(x,y,z) = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial z^2$ i rektangulära koordinater, medan i sfäriska koordinater ges den av
   $(\nabla^2(h))(\rho,\phi,\theta) = \partial^2 h/\partial\rho^2 + \frac{2}{\rho}\partial h/\partial\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial^2 h/\partial\phi^2 + \frac{\cot\phi}{\rho^2}\partial h/\partial\phi + \frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}\partial^2 h/\partial\theta^2$.
   Bestäm alla harmoniska funktioner h i $\mathbf{R}^3$, som bara beror på avståndet från origo, dvs. så att $h(\rho,\phi,\theta) = h(\rho), \nabla^2 h \equiv 0$. (3p.)

3. Antag att A är en 3×3-matris med egenvärdena $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Beskriv en metod som kan användas för att beräkna matrisen e^{At}. (3p.)

4. Bestäm de asymptotiskt stabila jämviktspunkterna hos det autonoma, icke-linjära differentialekvationssystemet $y_1'(t) = 1 - y_1(t)y_2(t)$, $y_2'(t) = y_1(t) - (y_2(t))^3$. (6p.)

5. Bestäm svängningstiderna (uttryckta mha. c och L) hos de i tiden periodiska lösningarna till den 1-dimensionella vågekvationen $u_{tt}(x,t) = c^2 \cdot u_{xx}(x,t), 0 \le x \le L, t \in \mathbf{R}$, som satisfierara randvillkoren $u(0,t) = 0, u_x(L,t) = 0$. (5p.)
   (Ekvationen dyker upp hos vissa blåsinstrument.)

6. Låt V och W vara två reella vektorrum och $T : V \mapsto W$ en linjär avbildning från V till W (dvs. $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$ för alla $v_1, v_2 \in V$ och alla $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$), som dessutom är *inverterbar* (dvs. $\exists T^{-1} = S : W \mapsto V$ sådan att $S \circ T = Id_V$ och $T \circ S = Id_W$, där Id_X är identitetsavbildningen på ett vektorrum X). Visa att S i så fall också är linjär. (5p.)