

Mat-1.1532 Svenskspråkig grundkurs i matematik 3-II

Tentamen 4.2.2012

Fyll i tydligt på varje svarspapper samtliga uppgifter. På förhörskod och -namn skriv kursens kod, namn samt slutförhör eller mellanförhör med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid denna tentamen får varken räknare eller tabellsamlingar användas. Fråga, om ni misstänker att det förekommer något tryckfel! Observera, att olika (del-)uppgifter kan ge olika antal poäng.

- Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ vara p stycken linjärt oberoende kolumnvektorer i $\mathbf{R}^m$ ($\Rightarrow p \leq m$) och låt $A = (\vec{v}_1 \vec{v}_2 \dots \vec{v}_p)$ vara en $m \times p$ -matris, vars kolumnvektorer är vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$. Då är $A^T A$ en inverterbar $p \times p$ -matris (pga. det linjära oberoendet). Låt $P = A(A^T A)^{-1} A^T$.
 - Visa att avbildningen $\vec{x} \mapsto P\vec{x}$ avbildar vektorn $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$ på matrisen A 's kolumnrum $\mathcal{R}(A) = \text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$. (2p.)
 - Visa att P är en projektionsmatris, dvs. att $P^2 = P$. (1p.)
 - Visa att avbildningen $\vec{x} \mapsto P\vec{x}$ är en ortogonal projektion, dvs. att $P\vec{x} \perp (\vec{x} - P\vec{x})$. (3p.) (P ger alltså ortogonala projektionen på A 's kolumnrum.)
- I planet ges Laplace-operatorn ∇^2 av $(\nabla^2(f))(x, y) = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2$ i rektangulära koordinater, medan i polära koordinater ges den av $(\nabla^2(g))(r, \theta) = \partial^2 g / \partial r^2 + \frac{1}{r} \partial g / \partial r + \frac{1}{r^2} \partial^2 g / \partial \theta^2$. Bestäm alla harmoniska funktioner g i $\mathbf{R}^2$, som bara beror på avståndet från origo, dvs. så att $g(r, \theta) = g(r)$, $\nabla^2 g \equiv 0$. (3p.)
 - I rummet ges Laplace-operatorn ∇^2 av $(\nabla^2(f))(x, y, z) = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2$ i rektangulära koordinater, medan i sfäriska koordinater ges den av $(\nabla^2(h))(\rho, \phi, \theta) = \partial^2 h / \partial \rho^2 + \frac{2}{\rho} \partial h / \partial \rho + \frac{1}{\rho^2} \partial^2 h / \partial \phi^2 + \frac{\cot \phi}{\rho^2} \partial h / \partial \phi + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \partial^2 h / \partial \theta^2$. Bestäm alla harmoniska funktioner h i $\mathbf{R}^3$, som bara beror på avståndet från origo, dvs. så att $h(\rho, \phi, \theta) = h(\rho)$, $\nabla^2 h \equiv 0$. (3p.)
- $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Beräkna A^n för alla $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. (4p.)
- Bestäm lösningen till differentialekvationssystemet $Y'(t) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} Y(t)$, $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ genom att skriva lösningen på formen $Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} X_2$, där λ_j är egenvärden och X_j egenvektorer. (4p.)
- Bestäm svängningstiderna (uttryckta mha. c och L) hos de i tiden periodiska lösningarna till den 1-dimensionella vågekvationen $u_{tt}(x, t) = c^2 \cdot u_{xx}(x, t)$, $0 \leq x \leq L$, $t \in \mathbf{R}$, som satisfierar randvillkoren $u(0, t) = 0$, $u_x(L, t) = 0$. (5p.) (Ekvationen dyker upp hos vissa blåsinstrument.)
- Låt V och W vara två reella vektorrum och $T: V \mapsto W$ en linjär avbildning från V till W (dvs. $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$ för alla $v_1, v_2 \in V$ och alla $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$), som dessutom är inverterbar (dvs. $\exists T^{-1} = S: W \mapsto V$ sådan att $S \circ T = Id_V$ och $T \circ S = Id_W$). Visa att S i så fall också är linjär. (5p.)