

Mat-1.1520 Grundkurs i matematik 2  
Tentamen och mellanförhörsoptagning 27.5.2011

*Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!  
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!*

Skriv tydligt på varje papper vilket prov du avlägger,  
Tentamensuppgifterna är 5 uppgifter av uppgifterna 1, 2, 5, 6, 9, 12.  
Mellanförhörsoptagningsuppgifterna är:  
Mf 1: Uppgifterna 1, 2, 3 och 4.  
Mf 2: Uppgifterna 5, 6, 7 och 8.  
Mf 3: Uppgifterna 9, 10, 11 och 12.

1. Antag att  $f(x, y) = x^2y + x + 2y$  så att  $f(-2, 1) = 4$ .
  - (a) Bestäm med hjälp av linjär approximering en övre gräns för  $|f(x, y) - 4|$  om man vet att  $|x + 2| \leq 0.01$  och  $|y - 1| \leq 0.02$ .
  - (b) Bestäm med hjälp av linjär approximering hur stor  $|x + 2|$  kan vara om man vet att  $|y - 1| \leq 0.01$  och man kräver att  $|f(x, y) - 4| \leq 0.09$ .
2. Förklara hur man med hjälp av Newtons metod approximativt kan bestämma nollpunkter för derivatan av funktionen  $f(x, y) = x^2y + 3xy + y^2 + x$ . Räkna antingen en iteration med startvärdena  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$  **eller** förklara med vilka kommandon man kan räkna (många) iterationer med tex. `matlab/octave`.
3. Teknolog  $T$  ville bestämma de lokala extremvärdena för funktionen  $f(x, y)$  och hittade en punkt i vilken gradienten av  $f$  var nollvektorn och sedan räknade hon ut andra derivatan av funktionen i denna punkt. Följande dag var hennes anteckningar i en enda röra och hon kom inte ihåg om hon fått som svar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}?$$

Vilken av matriserna  $A$  och  $B$  är den andra derivatan av  $f$  och vad för slags extremvärdespunkt är det eventuellt frågan om?

4. Antag att punkterna  $(x_k, y_k)_{k=1}^n$  är givna och man vill bestämma konstanter  $\alpha$  och  $\beta$  så att  $y_j \approx \alpha e^{-x_j} + \beta e^{x_j}$ . Förklara hur detta på ett enkelt och förnuftigt sätt kan göras. Härled ett ekvationssystem ur vilket  $\alpha$  och  $\beta$  kan bestämmas. Ge de kommandon i `matlab/octave` som behövs för att räkna ut  $\alpha$  och  $\beta$  (när  $(x_k, y_k)_{k=1}^n$  är givna).

5. Beräkna integralen  $\iint_{\Omega} 3x \, dx \, dy$  där  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq -x\}$  genom att använda polära koordinater.

6. Skriv ytintegralen  $\iint_Y g \, dS$  som en vanlig dubbelintegral då  $g(x, y, z) = (x - y - z)^2$  och  $Y$  är ytan  $x + y - z^2 = 2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Du behöver inte räkna ut integralen.

7. Beräkna divergensen och rotationen av funktionen  $\mathbf{f} = x\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j} + (x + 2y + 3z)\mathbf{k}$ .

8. Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$y'(t) + 3y(t) = 13 \sin(2t), \quad y(0) = 1.$$

9. Lös differentialekvationen

$$y''(t) + 4y'(t) + 20y(t) = 64e^{2t}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$$

10.

(a) Vad kan du säga om följande metod för att beräkna approximationer  $y_n \approx y(nh)$  till lösningen av differentialekvationen  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(0) = y_0$ :

$$k_1 = hf(t_n, y_n),$$

$$k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1),$$

$$k_3 = hf(t_n + h, y_n + k_2),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2 + k_3).$$

(b) Vad avses med beteckningen  $O(h^4)$ ?

11. Bestäm konvergensradien för potensserien  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1} x^{2n}$ , dvs. ett tal  $R$  så att serien konvergerar då  $|x| < R$  och divergerar (dvs. inte konvergerar) då  $|x| > R$ .

12. Antag att  $G = (E, V)$  äre en graf där  $V = \{(a, b, c) : a, b, c \in \{0, 1, 2\}\}$  och det det finns en båge mellan  $(a_1, b_1, c_1)$  och  $(a_2, b_2, c_2)$  om och endast om  $|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| + |c_1 - c_2| = 1$ . Noderna färgas svarta eller vita så att två noder som är grannar inte har samma färg och noden  $(0, 0, 0)$  blir svart.

(a) Hur många av noderna blir svarta och hur många vita?

(b) Vilken färg får noden  $(1, 1, 1)$ ?

(c) Finns det en väg som går exakt en gång genom varje nod och som startar i  $(0, 0, 0)$  och som slutar i  $(1, 1, 1)$ ?

*Ledning: Det lönar sig kanske inte att rita ut hela grafen eftersom bilden lätt blir för komplicerad, men du kan istället rita ut delgraferna som innehåller noderna  $\{(a, b, 0) : a, b \in \{0, 1, 2\}\}$ ,  $\{(a, b, 1) : a, b \in \{0, 1, 2\}\}$  och  $\{(a, b, 2) : a, b \in \{0, 1, 2\}\}$  och sedan beakta hur noderna i var och en av dessa måste färgas så att den ursprungliga grafen blir rätt färgad.*