Aalto-universitetet

Gripenberg, Pohjonen, Solin

Mat-1.1520 Grundkurs i matematik 2
Tentamen och mellanförhörsomtagning 27.5.2011

Skriv ditt namn, nummer och övriga uppgifter på varje papper!
En räknedosa (godkänd för studentexamen) är ett tillåtet hjälpmedel i detta prov!

Skriv tydligt på varje papper vilket prov du avlägger,
Tentamensuppgifterna är 5 uppgifter av uppgifterna 1, 2, 5, 6, 9, 12.
Mellanförhörsomtagningsuppgifterna är:
Mf 1: Uppgifterna 1, 2, 3 och 4.
Mf 2: Uppgifterna 5, 6, 7 och 8.
Mf 3: Uppgifterna 9, 10, 11 och 12.

1. Antag att $f(x, y) = x^2y + x + 2y$ så att $f(-2, 1) = 4$.

(a) Bestäm med hjälp av linjär approximering en övre gräns för $|f(x, y) - 4|$ om man vet att $|x + 2| \leq 0.01$ och $|y - 1| \leq 0.02$.

(b) Bestäm med hjälp av linjär approximering hur stor $|x + 2|$ kan vara om man vet att $|y - 1| \leq 0.01$ och man kräver att $|f(x, y) - 4| \leq 0.09$.

Lösning: Med hjälp av linjär approximering får vi

$$f(x, y) - f(-2, 1) \approx f_x(-2, 1)(x - (-2)) + f_y(-2, 1)(y - 1),$$

och eftersom $f_x(x, y) = 2xy + 1$ och $f_y(x, y) = x^2 + 2$ så är

$$f_x(-2, 1) = -3,$$
$$f_y(-2, 1) = 6.$$

(a) I detta fall blir resultatet

$$|f(x, y) - 4| \lessapprox |f_x(-2, 1)(x + 2)| + |f_y(-2, 1)(y - 1)| \leq 3 \cdot 0.01 + 6 \cdot 0.02 = 0.15.$$

(b) I detta fall gäller

$$|f(x, y) - 4| \lessapprox |f_x(-2, 1)(x + 2)| + |f_y(-2, 1)(y - 1)| \leq 3|x + 2| + 6 \cdot 0.01.$$

Nu kommer villkoret $|f(x, y) - 4| \lessapprox 0.09$ att var uppfyllt ifall

$$3|x + 2| + 6 \cdot 0.01 \leq 0.09,$$

vilket gäller om

$$|x + 2| \leq \frac{1}{3}(0.09 - 0.06) = 0.01.$$

---

2. Förklara hur man med hjälp av Newtons metod approximativt kan bestämma nollpunkter för derivatan av funktionen $f(x,y) = x^2y + 3xy + y^2 + x$. Räkna antingen en iteration med startvärdena $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ **eller** förklara med vilka kommandon man kan räkna (många) iterationer med tex. `matlab/octave`.

Lösning: Det ekvationsystem som man skall lösa blir

$$f_x(x,y) = 2xy + 3 + 1 = 0,$$
$$f_y(x,y) = x^2 + 3x + 2y = 0,$$

och om man nu skriver

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2xy + 3 + 1 \\ x^2 + 3x + 2y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

så är

$$\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+3 \\ 2x+3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nu skall man räkna

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{G}(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{x}_n),$$

och man får

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.0952381 & 0.238095 \\ 0.238095 & -0.0952381 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.142857 \\ 0.142857 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Om man fortsätter får man

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.194183 \\ -0.308811 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0.186189 \\ -0.296585 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 0.186141 \\ -0.296535 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 0.186141 \\ -0.296535 \end{pmatrix}$$

I `matlab/octave` kan vi definiera funktionerna med

```
G=@(X)[2*X(1)*X(2)+3*X(2)+1; X(1)^2+3*X(1)+2*X(2)];
DG=@(X)[2*X(2), 2*X(1)+3;2*X(1)+3,2];
```

sedan ge starvärdet med `X=[1;1]` och räkna iterationerna genom att upprepa kommandot `X=X - inv(DG(X))*G(X)`.

---

3. Teknolog T ville bestämma de lokala extremvärdena för funktionen $f(x,y)$ och hittade en punkt i vilken gradienten av f var nollvektorn och sedan räknade hon ut andra derivatan av funktionen i denna punkt. Följande dag var hennes anteckningar i en enda röra och hon kom inte ihåg om hon fått som svar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}?$$

Vilken av matriserna A och B är den andra derivatan av f och vad för slags extremvärdespunkt är det eventuellt frågan om?

Lösning: Matrisen $f''(\mathbf{x})$ är alltid symmetrisk eftersom $f_{xy} = f_{yx}$ så det är B som är andra derivatan av f. Matrisens B determinant är $(-2)\cdot(-1) - 3\cdot 3 = 2 - 9 = -7$ och eftersom determinanten är produkten av egenvärdena så har egenvärdena olika tecken och det är frågan om en sadelpunkt och inte en lokal extremvärdespunkt.

---

4. Antag att punkterna $(x_k, y_k)_{k=1}^n$ är givna och man vill bestämma konstanter α och β så att $y_j \approx \alpha e^{-x_j} + \beta e^{x_j}$. Förklara hur detta på ett enkelt och förnuftigt sätt kan göras. Härled ett ekvationssystem ur vilket α och β kan bestämmas. Ge de kommandon i `matlab/octave` som behövs för att räkna ut α och β (när $(x_k, y_k)_{k=1}^n$ är givna).

Lösning: Ett sätt är att minimera kvadratsumman

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha e^{-x_j} + \beta e^{x_j} - y_j\Big)^2.$$

Derivatans nollställen bestäms av ekvationerna

$$\begin{aligned} 0 = f_\alpha(\alpha,\beta) &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha e^{-x_k} + \beta e^{x_k} - y_k\Big)e^{-x_k}, \\ 0 = f_\beta(\alpha,\beta) &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\alpha e^{-x_k} + \beta e^{x_k} - y_k\Big)e^{x_k}. \end{aligned}$$

Dessa ekvationer kan skrivas i formen

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{-2x_k}\right)\alpha + \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\beta &= \sum_{k=1}^{n} e^{-x_k} y_k, \\ \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\alpha + \left(\sum_{k=1}^{n} e^{2x_k}\right)\beta &= \sum_{k=1}^{n} e^{x_k} y_k. \end{aligned}$$

När man använder `matlab/octave` och datapunkerna $(x_k, y_k)_{k=1}^n$ är skrivna i två radvektorer `x` ochh `y` så kan man räkna ut α och β på följande sätt:

```
A= [exp(-x);exp(x)];
C= inv(A*A')*A*y;
```

och då får man α som `C(1)` och β som $C(2)$.

---

5. Beräkna integralen $\iint_\Omega 3x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ där $\Omega = \{\,(x,y) : x^2+y^2 \le 4, 0 \le y \le -x\,\}$ genom att använda polära koordinater.

Lösning: När man använder polära koordinater, dvs.

$$x = r\cos(\theta),$$
$$y = r\sin(\theta),$$

så blir $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Eftersom $x^2+y^2 \le 4$ då $0 \le r \le 2$, $y \ge 0$ då $0 \le \theta \le 2\pi$ och $y \le -x$ då $\frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{7}{4}\pi$ så ser vi att $(x,y) \in \Omega$ om och endast om $0 \le r \le 2$ och $\frac{3}{4}\pi \le \theta \le \pi$. Därför får vi

$$\iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\left(\int_0^2 3r\cos(\theta)r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\left(\Big/_0^2 r^3\cos(\theta)\right)\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} 8\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big/_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} 8\sin(\theta) = 0 - 8\sin(\tfrac{3}{4}\pi) = -\frac{8}{\sqrt{2}}.$$

---

6. Skriv ytintgeralen $\iint_Y g\,\mathrm{d}S$ som en vanlig dubbelintegral då $g(x,y,z) = (x-y-z)^2$ och Y är ytan $x+y-z^2 = 2$, $-1 \le x \le 1$, $0 \le z \le 2$. Du behöver inte räkna ut integralen.

Lösning: Eftersom begränsningarna är givna för x och z så väljer vi dem som parametrar och skriver ekvationen för ytan i formen $y = 2-x+z^2$. Parameterframställningen av ytan blir då

$$\mathbf{r}(x,z) = x\mathbf{i} + (2-x+z^2)\mathbf{j} + z\mathbf{j}.$$

Därför är

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (\mathbf{i}-\mathbf{j}) \times (2z\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2z & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2z \end{vmatrix}\mathbf{k} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

Av detta följer att

$$\mathrm{d}S = |-\mathbf{i}-\mathbf{j}+2z\mathbf{k}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \sqrt{2+4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

Eftersom $y = 2-x+z^2$ så får vi till slut

$$\iint_B g\,\mathrm{d}S = \int_0^2\int_{-1}^1 \left(x-2+x-z^2-z\right)^2\sqrt{2+4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^2\int_{-1}^1 \left(2x-2-z^2-z\right)^2\sqrt{2+4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

---

7. Beräkna divergensen och rotationen av funktionen $\mathbf{f} = x\mathbf{i} + (x+2y)\mathbf{j} + (x+2y+3z)\mathbf{k}$.

Lösning: Divergensen är

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}(x+2y) + \frac{\partial}{\partial z}(x+2y+3z) = 1+2+3 = 6,$$

och rotationen är

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & (x+2y) & (x+2y+3z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+2y) & (x+2y+3z) \end{vmatrix} \mathbf{i}$$

$$- \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & (x+2y+3z) \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x & (x+2y) \end{vmatrix} \mathbf{k} = (2-0)\mathbf{i} - (1-0)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

---

8. Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$y'(t) + 3y(t) = 13\sin(2t), \quad y(0) = 1.$$

Lösning: Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y'(t) + 3y(t) = 0$ är $y_h(t) = c\mathrm{e}^{-3t}$. Vi försöker bestämma en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen i formen

$$y_p(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t).$$

Då är $y_p'(t) = 2A\cos(2t) - 2B\sin(2t)$ och för att ekvationen skall gälla måste vi ha

$$2A\cos(2t) - 2B\sin(2t) + 3A\sin(2t) + 3B\cos(2t) = 13\sin(2t).$$

Av villkoret att koefficienterna för sinus- och cosinusfunktionerna skall vara lika får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -2B + 3A &= 13, \\ 2A + 3B &= 0. \end{aligned}$$

Av den andra ekvationen följer att $A = \frac{3}{2}B$ så att den första ekvationen ger $-2B - \frac{9}{2}B = 13$ eller $-13B = 26$, dvs. $B = -2$ och $A = 3$. Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c\mathrm{e}^{-3t} + 3\sin(2t) - 2\cos(2t).$$

När vi sätter in initialvillkoret $y(0) = 1$ får vi $1 = c + 3 \cdot 0 - 2$ så att $c = 3$. Lösningen är alltså

$$y(t) = 3\mathrm{e}^{-3t} + 3\sin(2t) - 2\cos(2t).$$

---

9. Lös differentialekvationen

$$y''(t) + 4y'(t) + 20y(t) = 64\mathrm{e}^{2t}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$$

Lösning: Den karakteristiska ekvationen för den homogena ekvationen $y''(t)+4y'(t)+20y(t) = 0$ är

$$r^2 + 4r + 20 = 0$$

vilket innebär att

$$r = -2 \pm \sqrt{4-20} = -2 \pm 4\mathrm{i}.$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är därför

$$y_h(t) = c_1\mathrm{e}^{-2t}\cos(4t) + c_2\mathrm{e}^{-2t}\sin(4t).$$

Vi försöker bestämma en partikulärlösning till den ursprungliga ekvationen i formen $y_p(t) = A\mathrm{e}^{2t}$ och eftersom $y_p'(t) = 2A\mathrm{e}^{2t}$ och $y_p''(t) = 4A\mathrm{e}^{2t}$ så skall

$$4A\mathrm{e}^{2t} + 8A\mathrm{e}2t + 20A\mathrm{e}^{2t} = 64\mathrm{e}^{2t}.$$

Detta innebär att $A = 2$ och den allmänna lösningen är

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2t}\cos(4t) + c_2 \mathrm{e}^{-2t}\sin(4t) + 2\mathrm{e}^{2t}.$$

Eftersom $y'(t) = -2c_1\mathrm{e}^{-2t}\cos(4t) - 4c_1\mathrm{e}^{-2t}\sin(4t) - 2c_2\mathrm{e}^{2t}\sin(4t) + 4c_2\mathrm{e}^{-2t}\cos(4t) + 4\mathrm{e}^{2t}$ så ger initilavillkoren ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3 &= y(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 + 2, \\ -2 &= y'(0) = -2c_1 + 4c_2 + 4, \end{aligned}$$

ur vilket vi får $c_1 = 1$ och $c_2 = -1$. Lösningen till differentialekvationen är därför

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos(4t) - \mathrm{e}^{-2t}\sin(4t) + 2\mathrm{e}^{2t}.$$

10.

(a) Vad kan du säga om följande metod för att beräkna approximationer $y_n \approx y(nh)$ till lösningen av differentialekvationen $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = y_0$:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n), \\ k_2 &= hf(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(t_n + h, y_n + k_2), \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{4}\big(k_1 + 3k_2 + k_3\big). \end{aligned}$$

(b) Vad avses med beteckningen $O(h^4)$?

Lösning: (a) Om $f(t, y) = 1$ så får man i varje steg $k_1 = k_2 = k_3 = h$ av vilket följer att $y_{n+1} = y_n + \frac{5}{4}h$. Eftersom lösningen till differentialekvationen är $y(t) = t + y_0$ så borde vi förstås ha $y_{n+1} = y_n + h$. Av detta följer att den metod är alldeles felaktig eftersom felt i varje steg är $\frac{1}{4}h$ tom. i detta enkla fall och den är mycket sämre än Eulers metod.

(b) Med $O(h^4)$ avses en funktion $f(h)$ så att det finns en konstant C så att $|f(h)| \le Ch^4$ (då h är tillräckligt liten, om inte något annat sägs).

---

11. Bestäm konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}x^{2n}$, dvs. ett tal R så att serien konvergerar då $|x| < R$ och divergerar (dvs. inte konvergerar) då $|x| > R$.

Lösning: Vi använder kvottestet för att undersöka för vilka värden på x som serien konvergerar absolut och därför räknar vi ut

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}x^{2(n+1)}}{\frac{2^n}{n^2+1}x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n^2+)x^2}{n^2+2n+2} = 2x^2.$$

Med hjälp av kvottestet ser vi att serien konvergerar då $2x^2 < 1$, dvs. då $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ och divergerar då $2x^2 > 1$, dvs. då $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Detta betyder att konvergensradien är $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

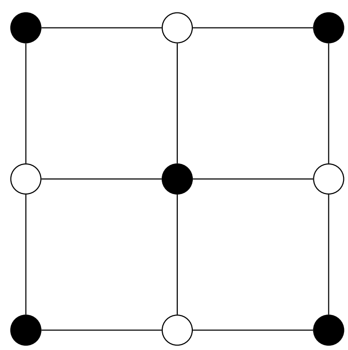
---

12. Antag att $G = (E, V)$ äre en graf där $V = \{ (a, b, c) : a, b, c, \in \{0, 1, 2\} \}$ och det det finns en båge mellan (a_1, b_1, c_1) och (a_2, b_2, c_2) om och endast om $|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| + |c_1 - c_2| = 1$. Noderna färgas svarta eller vita så att två noder som är grannar inte har samma färg och noden $(0, 0, 0)$ blir svart.

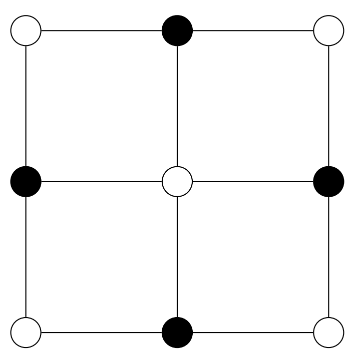
(a) Hur många av noderna blir svarta och hur många vita?
(b) Vilken färg får noden $(1, 1, 1)$?
(c) Finns det en väg som går exakt en gång genom varje nod och som startar i $(0, 0, 0)$ och som slutar i $(1, 1, 1)$?

Ledning: Det lönar sig kanske inte att rita ut hela grafen eftersom bilden lätt blir för komplicerad, men du kan istället rita ut delgraferna som innehåller noderna $\{ (a, b, 0) : a, b \in \{0, 1, 2\} \}$, $\{ (a, b, 1) : a, b \in \{0, 1, 2\} \}$ *och* $\{ (a, b, 2) : a, b \in \{0, 1, 2\} \}$ *och sedan beakta hur noderna i var och en av dessa måste färgas så att den ursprungliga grafen blir rätt färgad.*

Lösning: Delgrafen med noderna $\{ (a, b, 0) : a, b \in \{0, 1, 2\} \}$ och $(0, 0, 0)$ nere till vänster och $(2, 2, 0)$ uppe till höger kommer med färgningen att se ut såhär:

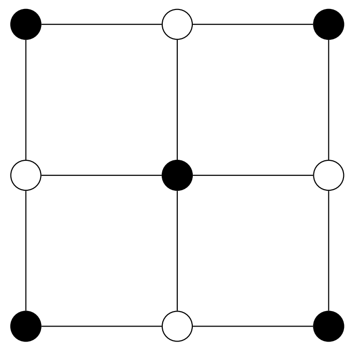


Noderna $(0, 0, 0)$ och $(0, 0, 1)$ är grannar och därför måste $(0, 0, 1)$ vara vit så om vi ritar upp delgrafen med noderna $\{ (a, b, 1) : a, b \in \{1, 2, 3\} \}$ så får vi följande graf där noden nere till vänster är $(0, 0, 1)$ och noden uppe till höger är $(2, 2, 1)$.



Eftersom noderna $(a, b, 0)$ och $(a, b, 1)$ är grannar ser vi att färgningsvillkoret är uppfyllt.

Noderna $(0, 0, 1)$ och $(0, 0, 2)$ är grannar så noden $(0, 0, 2)$ skall vara svart och delgrafen $\{ (a, b, 2) : a, b \in \{0, 1, 2\} \}$ där $(0, 0, 2)$ är noden nere till vänster och $(2, 2, 2)$ noden uppe till höger kommer då att se ut såhär:



(a) Av noderna är 14 svarta och 13 vita.

(b) Noden $(1, 1, 1)$ blir vit.

(c) Om det finns en väg som går exakt en gång genom varje nod och som startar i $(0, 0, 0)$ och som slutar i $(1, 1, 1)$ så är varannan nod svart och varannan nod vit och om den första är svart och den sista vit så finns det lika många svarta och vita noder i vägen vilket inte är möjligt om den går precis en gång genom varje nod.