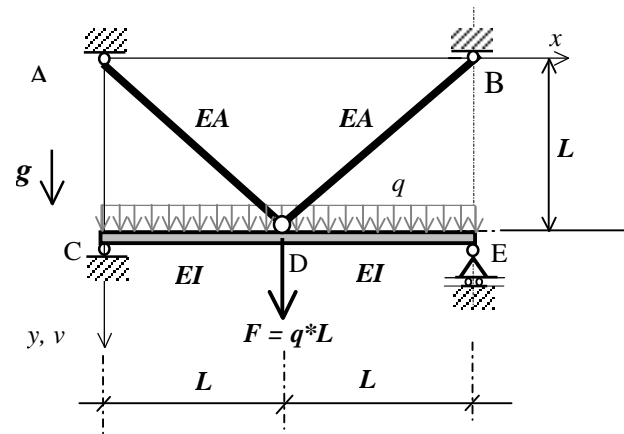


Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
 - opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
 - kaikki nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
 - koulutusohjelma, opiskelijanumero, myös tarkistuskirjain
 - milloin olet pakolliset kotitehtävät suorittanut sekä monettako kertaa olet tentissä

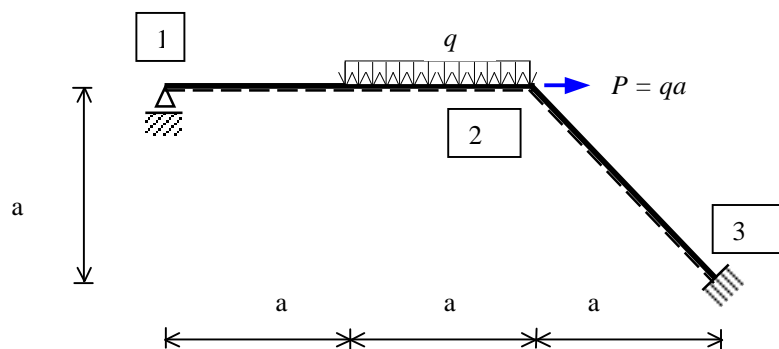
1. Määritä pisteen D pysysiirtymä $v(D)$.
2. Sauvojen AD ja BD aksiaalijäykkyys
3. on EA ja palkin taivutusjäykkyys on EI .

1. Define the vertical displacement $v(D)$ at point D.
 The axial stiffness of bars AB and BD is EA and the bending stiffness of the beam is EI .



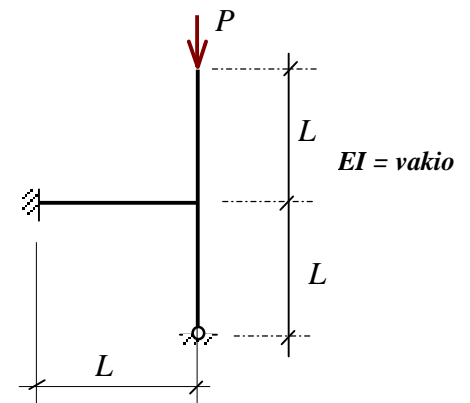
2. Määritä ja piirrä oheisen tasokehän taivutusmomentti- ja leikkausvoimakuviot. Kehän kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on EI . Mikä on pisteen 1 vaakasiirtymä?

2. Determine and plot the bending moment and shear force diagrams for the frame. What is then the horizontal displacement at point 1. The bending stiffness EI is constant.

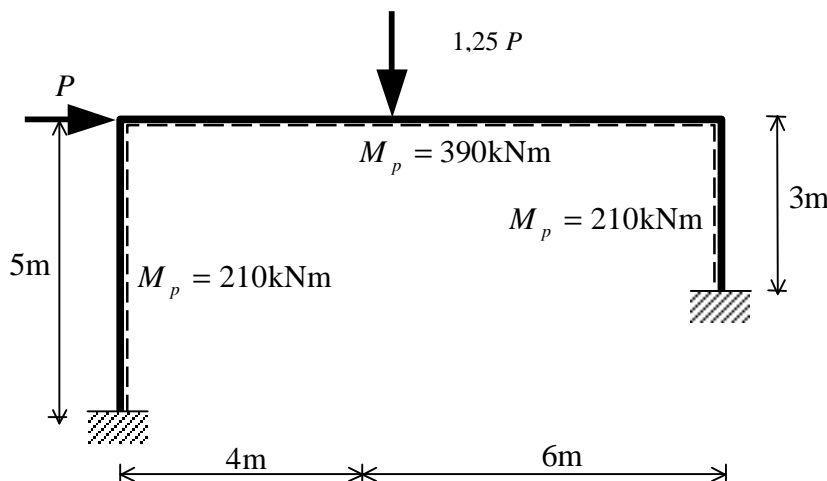


3. Määritä kriittisen (nurjahdus-) kuorman P_{kr} arvo.

3. Determine the critical normal force P_{cr} (buckling). Bending stiffness EI is constant

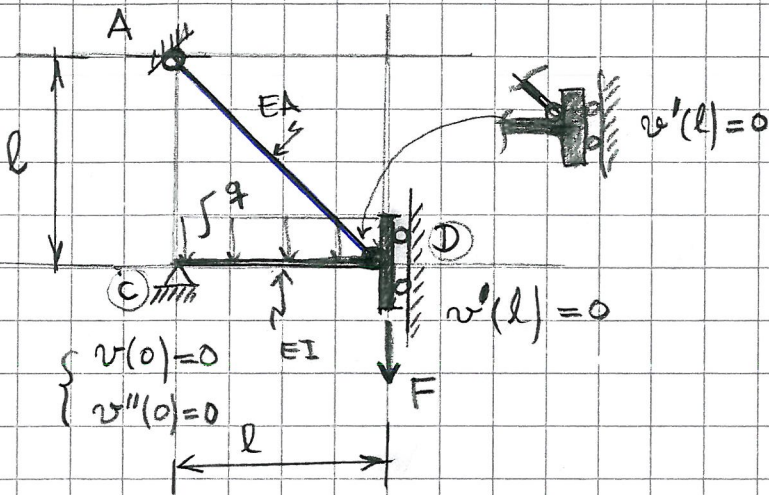


4. Määritä oheisen kehän plastinen rajakuorma. Tarkista, ettei myötöehtoa rikota missään. Piirrä tasapainoehdot toteuttava taivutusmomenttijakauma.



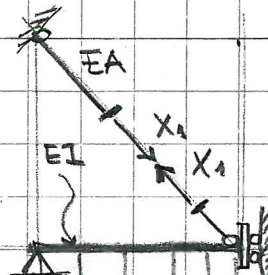
4. Determine the plastic limit load. Check further that yield condition holds. Plot the corresponding bending moment diagram that fulfills the equilibrium conditions.

1) Rakenne ja kuormitus ovat symmetrisiä \Rightarrow voidaan redusoida tehtävää seuraavasti:



Rakenne on kerran staattisesti määrätty

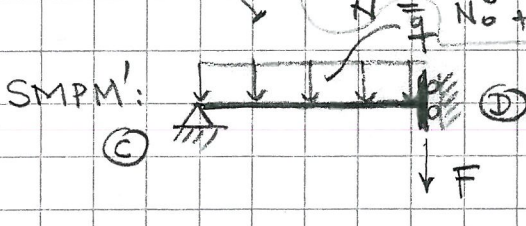
SMPM



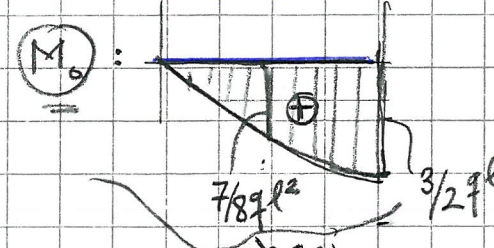
Ratkaisu: a) yleisellä voimamenetelmällä tai b) palkin DY:n avulla, jossa taipuman

huomioidaan kinemaattiset reunaehdot sekä taipuman yhteyssopivuutta sauvan AD pituuden Δ muutoksen kanssa.

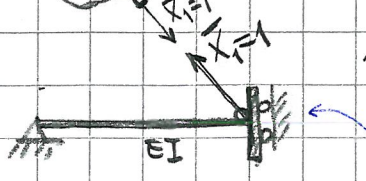
a) $\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$, $\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M}_1^2 dx + \frac{1}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} \bar{N}_1^2 ds$



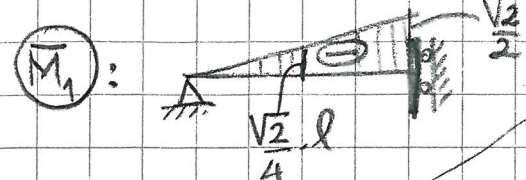
$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_D - F \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0$
 $M_D = F \cdot l + q \frac{l^2}{2} = q l^2 + \frac{q l^2}{2} = \frac{3q l^2}{2}$



$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_C + F + q l = 0 \Rightarrow R_C = q l + F = 2q l = 2q l$
 $M(l/2) = 2q l \cdot \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = q l^2 - \frac{1}{8} q l^2 = \frac{7}{8} q l^2$



$\delta_{11} = \delta_{11}^{(M)} + \delta_{11}^{(N)} = \frac{l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sqrt{2} l}{3}}{EI} + \frac{1}{EA} \sqrt{2} l = \frac{l^3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{l \sqrt{2}}{EA}}$



$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M}_1 M_0 dx + \frac{1}{EA} \int_0^{\sqrt{2}l} \bar{N}_1 N_0 ds = \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M}_1 M_0 dx$

$\delta_{10} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{6} \cdot \left(4 \cdot \frac{\sqrt{2} l}{4} \cdot \frac{7}{8} q l^2 + \frac{\sqrt{2} l}{2} \cdot \frac{3}{2} q l^2 \right) = -0,383 \frac{q l^4}{EI}$

$$X_1 = 0,383 \frac{l^4}{EI} q \cdot \frac{1}{\frac{l^3}{6EI} + \frac{l\sqrt{2}}{EA}}$$

olkoon $EA \equiv \frac{\eta}{l^2} EI = (\eta/l^2) EI$, jossa $\eta \in \mathbb{R}^+$

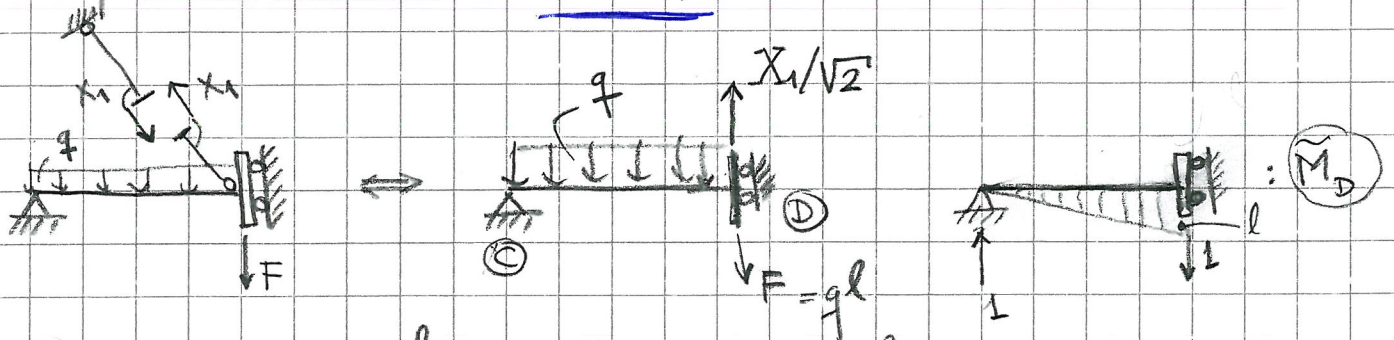
$$X_1 = 0,383 \frac{l^4}{EI} q \cdot \frac{1}{\frac{l^3}{6EI} + \frac{\sqrt{2}l}{\eta/l^2 EI}} = 0,383 \frac{l^4}{EI} \cdot \frac{6\eta EI}{\eta l^3 + 6\sqrt{2} l^3} \cdot q$$

$$= \frac{6 \cdot 0,383 \eta}{\eta + 6\sqrt{2}} q l = + \frac{2,298 \eta}{\eta + 6\sqrt{2}} q \equiv \xi \cdot q l, \text{ jossa}$$

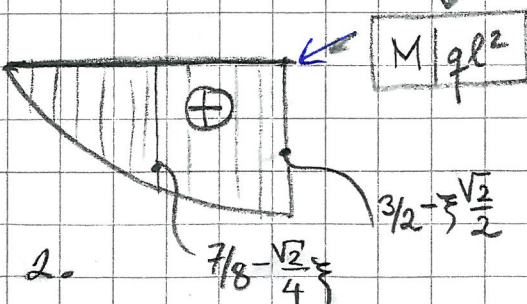
$$\xi = \frac{2,298 \eta}{\eta + 6\sqrt{2}} \text{ ja } \eta \equiv \frac{EA \cdot l^2}{EI}$$

$$X_1 \approx \frac{2,3 \cdot \frac{EA \cdot l^2}{EI}}{\frac{EA \cdot l^2}{EI} + 6\sqrt{2}} \cdot q l \leftarrow \begin{array}{l} \text{merkitään } \xi \text{ illä} \\ \text{saavassa AD oleva} \\ \text{vetovoima} \end{array}$$

Taipumien laskenta: $v(D) = ?$ (tai $DY: \alpha \xi$)



$$v(D) = \frac{1}{EI} \int_0^l M \cdot \tilde{M}_D dx = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_0 + X_1 \tilde{M}_1) \cdot \tilde{M}_D dx$$

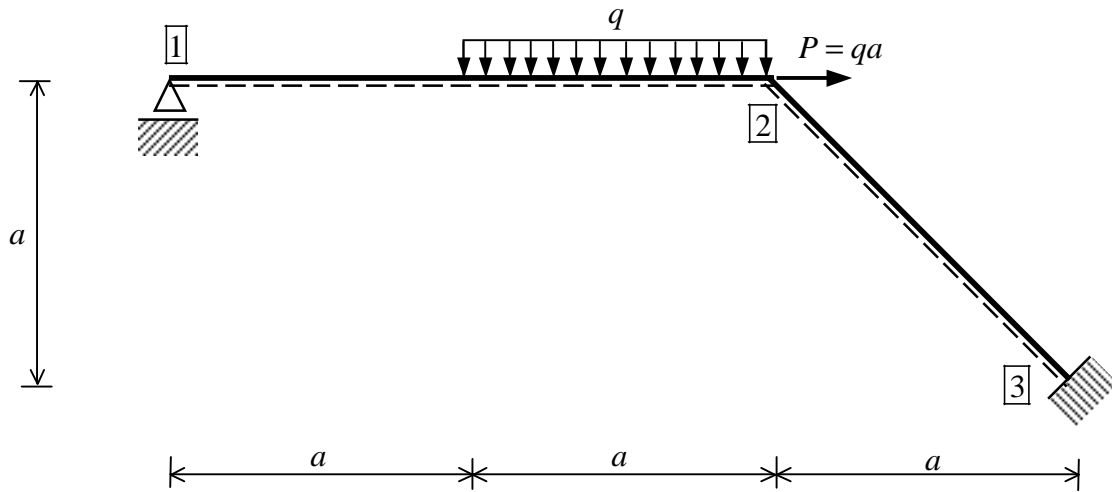


tarvitsee enää kuin laskea tätä integraalia

2. Määritä ja piirrä oheisen tasokehän taivutusmomenttikuvio. Kehän kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on EI .

2.1: kulmanmuutosmenetelmä

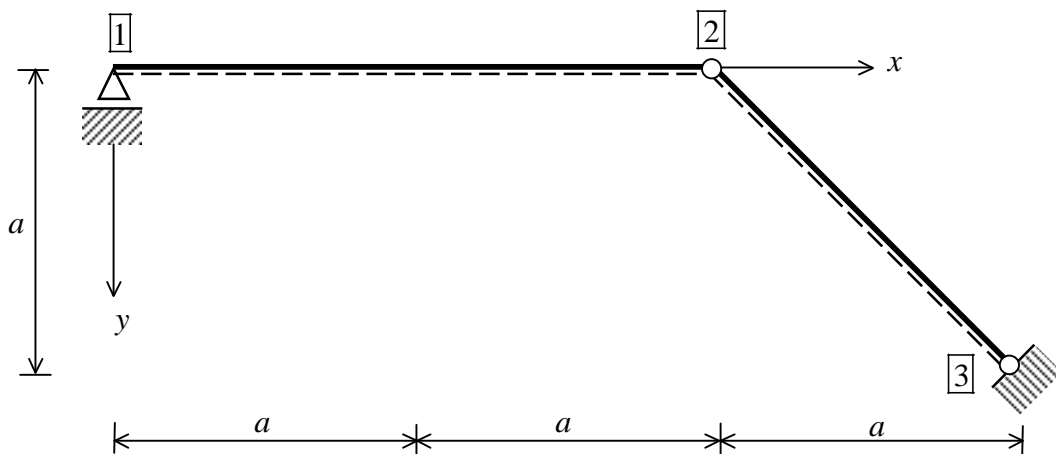
Huom. 1) tehtävä kannattaa laskea yleisellä voimamenetelmällä; tällöin on vain 1 tuntematon, esim tukireaktio R_1



Ratkaisu:

Nivelmekanismi:

Siirtyvyyden kertaluku: $n_{\text{sii}} = 2k - t - s = 2 \cdot 3 - 3 - 2 = 1$.



Kinematikka:

$$\text{Sauva } \boxed{1}-\boxed{2}: \begin{cases} \overset{678}{u_2 - u_1 = -(y_2 - y_1)\psi_{12}} \Rightarrow u_2 = u_1, \\ \underset{678}{v_2 - v_1 = (x_2 - x_1)\psi_{12}} \Rightarrow v_2 = 2a\psi_{12}. \end{cases}$$

$$\text{Sauva } \boxed{2}-\boxed{3}: \begin{cases} \underset{678}{u_3 - u_2 = -(y_3 - y_2)\psi_{23}} \Rightarrow u_1 = a\psi_{23} = -2a\psi_{12}, \\ \underset{678}{v_3 - v_2 = (x_3 - x_2)\psi_{23}} \Rightarrow \psi_{23} = -2\psi_{12}. \end{cases}$$

Otetaan riippumattomaksi sauvakiertymäksi $\psi_{12} = \psi$, jolloin saadaan:

$$u_1 = u_2 = -2a\psi, \quad v_2 = 2a\psi, \quad \psi_{23} = -2\psi$$

Kulmanmuutosmenetelmän yhtälöt:

$$M_{21} = \frac{3EI}{2a} \overset{\mathcal{F}}{\varphi}_{21} - \frac{3EI}{2a} \overset{\mathcal{Y}}{\psi}_{21} + MK_{21}^0 = \frac{3EI}{2a} \varphi_2 - \frac{3EI}{2a} \psi + \frac{q \frac{3a}{2} a}{8(2a)^2} [4(\frac{a}{2})^2 + 8 \frac{3a}{2} \frac{a}{2} - a^2]$$

$$= \frac{3EI}{2a} \varphi_2 - \frac{3EI}{2a} \psi + \frac{9}{32} qa^2$$

$$M_{23} = \frac{4EI}{a\sqrt{2}} \overset{\mathcal{F}}{\varphi}_{23} + \frac{2EI}{a\sqrt{2}} \overset{\mathcal{Y}}{\varphi}_{32} - \frac{6EI}{a\sqrt{2}} \overset{\mathcal{F}\psi}{\psi}_{23} + MK_{23}^0 = 2\sqrt{2} \frac{EI}{a} \varphi_2 + 6\sqrt{2} \frac{EI}{a} \psi$$

$$M_{32} = \frac{4EI}{a\sqrt{2}} \overset{\mathcal{Y}}{\varphi}_{32} + \frac{2EI}{a\sqrt{2}} \overset{\mathcal{F}}{\varphi}_{23} - \frac{6EI}{a\sqrt{2}} \overset{\mathcal{F}\psi}{\psi}_{32} + MK_{32}^0 = \sqrt{2} \frac{EI}{a} \varphi_2 + 6\sqrt{2} \frac{EI}{a} \psi$$

Nurkan $\boxed{2}$ momenttitasapaino:

$$M_{21} + M_{23} = 0 \Rightarrow \frac{3EI}{2a} \varphi_2 - \frac{3EI}{2a} \psi + \frac{9}{32} qa^2 + 2\sqrt{2} \frac{EI}{a} \varphi_2 + 6\sqrt{2} \frac{EI}{a} \psi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(4\sqrt{2} + 3)EI}{a} \varphi_2 + \frac{(12\sqrt{2} - 3)EI}{a} \psi = -\frac{9}{16} qa^2$$

Siirtymäyhtälö:

$$\bar{\psi} = 1, \bar{\psi}_{12} = 1, \bar{\psi}_{23} = \bar{\psi}_{32} = -2, \bar{u}_2 = -2a, \bar{v}_2 = 2a$$

$$W_{\text{int}} = M_{21} \overset{\mathcal{Y}}{\bar{\psi}}_{21} + M_{23} \overset{\mathcal{F}}{\bar{\psi}}_{23} + M_{32} \overset{\mathcal{F}}{\bar{\psi}}_{32} = M_{21} - 2M_{23} - 2M_{32}$$

$$W_{\text{ext}} = P\bar{u}_2 + qa \cdot \frac{3}{4} \bar{v}_2 = qa(-2a + \frac{3}{4} \cdot 2a) = -\frac{qa^2}{2}$$

$$W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow M_{21} - 2M_{23} - 2M_{32} - \frac{qa^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3EI}{2a} \varphi_2 - \frac{3EI}{2a} \psi + \frac{9}{32} qa^2 - 4\sqrt{2} \frac{EI}{a} \varphi_2 - 12\sqrt{2} \frac{EI}{a} \psi - 2\sqrt{2} \frac{EI}{a} \varphi_2 - 12\sqrt{2} \frac{EI}{a} \psi + qa^2 = 0 \text{ Yht}$$

$$\Rightarrow \frac{(12\sqrt{2} - 3)EI}{a} \varphi_2 + \frac{(48\sqrt{2} + 3)EI}{a} \psi = -\frac{7}{16} qa^2$$

Yhtälöryhmä ja ratkaisu:

$$\begin{cases} (4\sqrt{2} + 3)\varphi_2 + (12\sqrt{2} - 3)\psi = -\frac{9}{16} \frac{qa^3}{EI} \\ (12\sqrt{2} - 3)\varphi_2 + (48\sqrt{2} + 3)\psi = -\frac{7}{16} \frac{qa^3}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8,657 & 13,971 \\ 13,971 & 70,882 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{qa^3}{EI} \begin{Bmatrix} -0,5625 \\ -0,4375 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{qa^3}{EI} \frac{1}{418,437} \begin{bmatrix} 70,882 & -13,971 \\ -13,971 & 8,657 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,5625 \\ -0,4375 \end{Bmatrix} = \frac{qa^3}{EI} \begin{Bmatrix} -0,08068 \\ 0,00973 \end{Bmatrix}$$

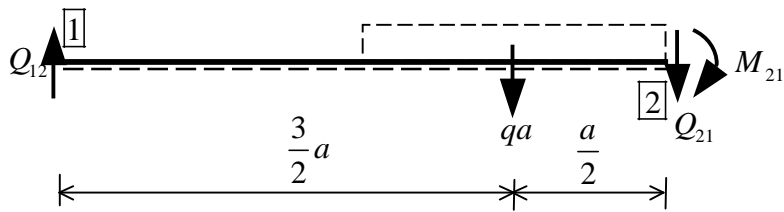
Sauvanpäämomentit:

$$M_{21} = \frac{3EI}{2a} (-0,08068 \frac{qa^3}{EI}) - \frac{3EI}{2a} (0,00973 \frac{qa^3}{EI}) + \frac{9}{32} qa^2 = 0,1456qa^2$$

$$M_{23} = 2\sqrt{2} \frac{EI}{a} (-0,08068 \frac{qa^3}{EI}) + 6\sqrt{2} \frac{EI}{a} (0,00973 \frac{qa^3}{EI}) = -0,1456qa^2, \text{ OK}$$

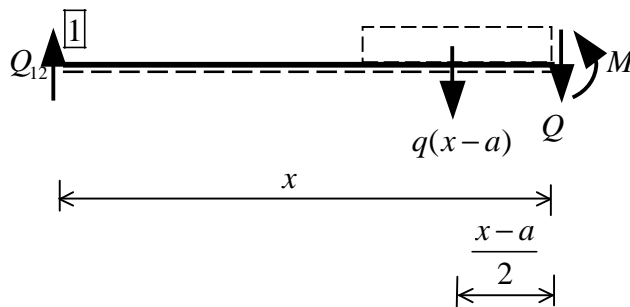
$$M_{32} = \sqrt{2} \frac{EI}{a} (-0,08068 \frac{qa^3}{EI}) + 6\sqrt{2} \frac{EI}{a} (0,00973 \frac{qa^3}{EI}) = 0,0315qa^2$$

Sauvanpääleikkausvoima Q_{12} :



$$\boxed{2)} \quad Q_{12} \cdot 2a - qa \cdot \frac{a}{2} + M_{21} = 0 \Rightarrow Q_{12} = \frac{qa}{4} - \frac{M_{21}}{2a} = 0,1772qa$$

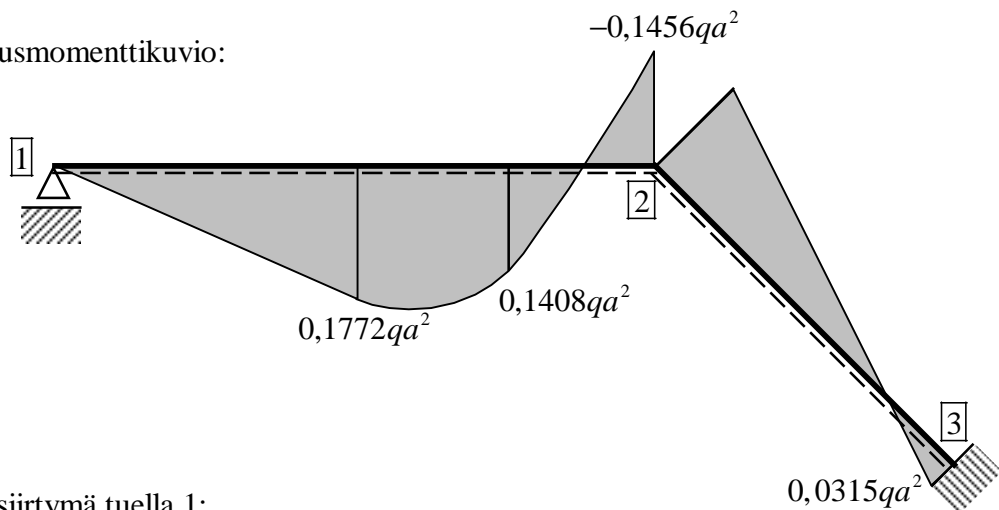
Taivutusmomentti välillä $a \leq x \leq 2a$:



$$\boxed{X)} \quad Q_{12} \cdot x - q(x-a) \cdot \frac{x-a}{2} - M = 0$$

$$\Rightarrow M = Q_{12} \cdot x - q(x-a) \cdot \frac{x-a}{2} = [0,1772 \frac{x}{a} - 0,5(\frac{x}{a} - 1)^2] qa^2$$

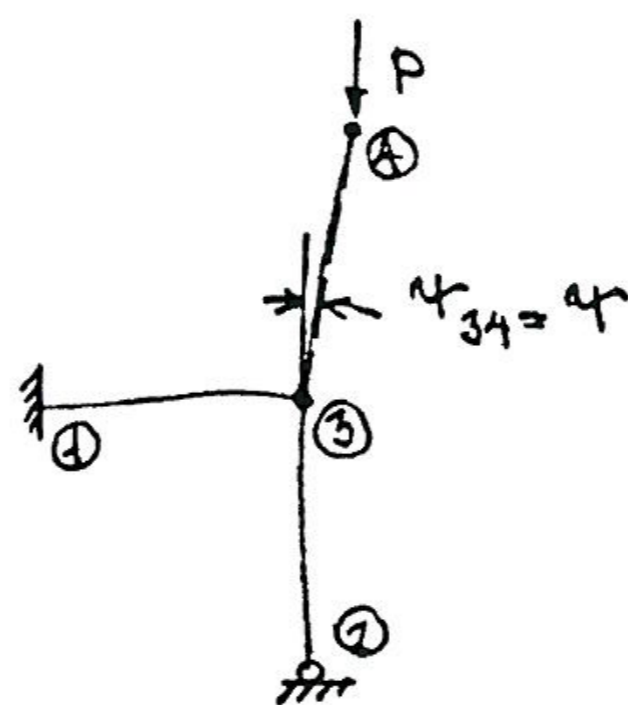
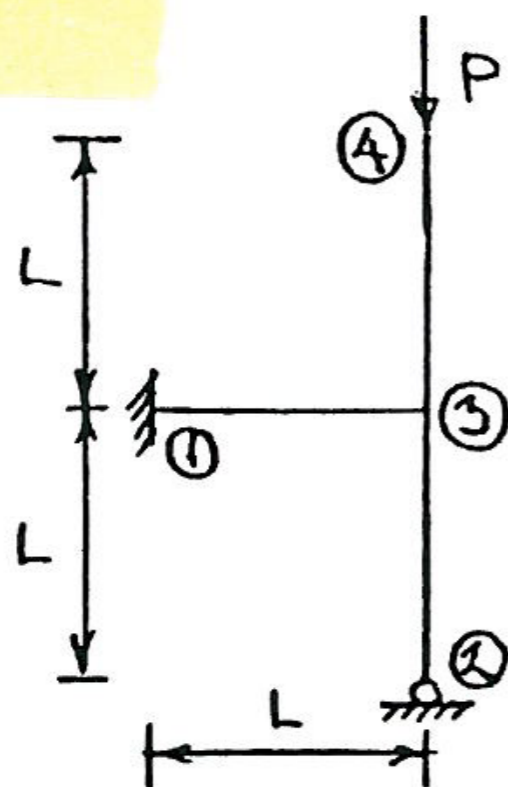
Taivutusmomenttikuvio:



Vaakasiirtymä tuella 1:

$$u_1 = -2a\psi = -2a \times 0,00973 \cdot qa^3 / EI = 0,01946 \cdot qa^4 / EI$$

3.



$$a_{31} = \frac{4EJ}{L}$$

$$A_{32}^0 = A_{34}^0 = \frac{3EJ}{L} \frac{1}{4(kL)}$$

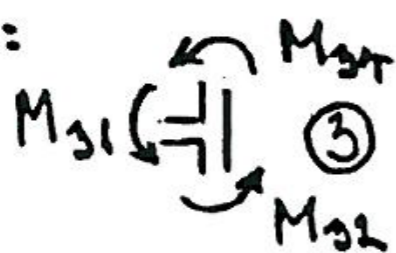
$$k^2 = \frac{P}{EJ}$$

$$M_{31} = a_{31} \varphi_{31} + b_{31} \varphi_{13}^0 - c_{31} \psi_{31}$$

$$M_{32} = A_{32}^0 \varphi_{32} - A_{32}^0 \psi_{32}$$

$$M_{34} = A_{34}^0 \varphi_{34} - A_{34}^0 \psi_{34}$$

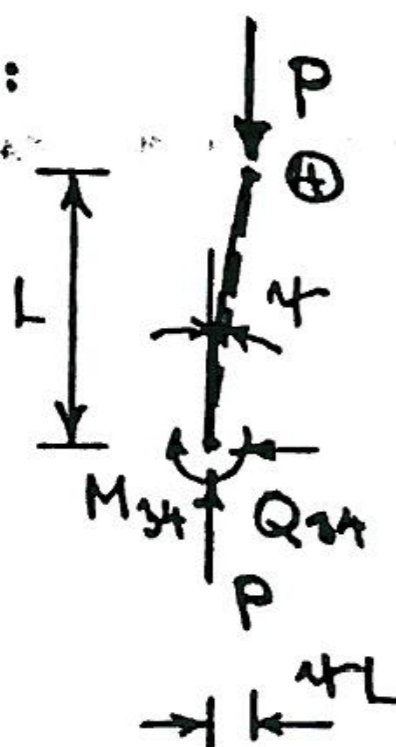
node 1:



$$\textcircled{3} \quad M_{31} + M_{32} + M_{34} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(a_{31} + A_{32}^0 + A_{34}^0) \varphi_3 - A_{34}^0 \psi = 0}}$$

node 2:



$$\rightarrow Q_{34} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad -M_{34} - Q_{34}^0 L - P \psi L = 0$$

$$\Rightarrow -M_{34} - PL \psi = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{-A_{34}^0 \varphi_3 + (A_{34}^0 - PL) \psi = 0}}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{31} + A_{32}^0 + A_{34}^0 & -A_{34}^0 \\ \hline -A_{34}^0 & A_{34}^0 - PL \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \varphi_3 \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Wurzelansatz:

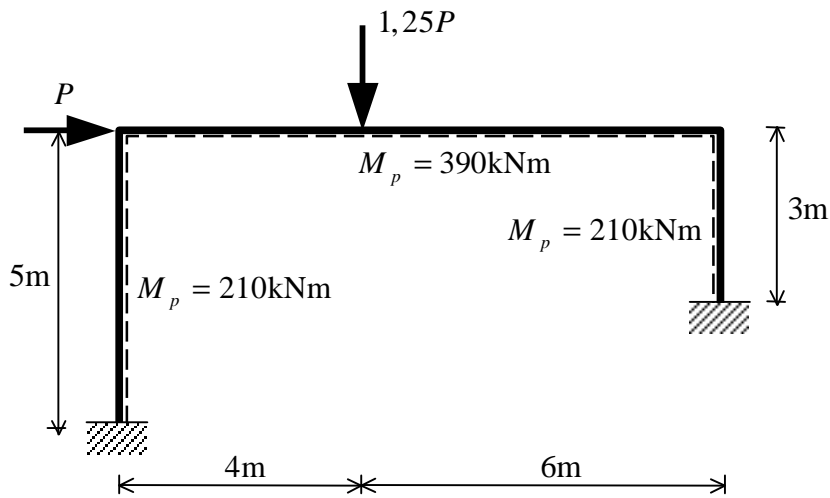
$$\det[-] = (a_{31} + A_{32}^0 + A_{34}^0)(A_{34}^0 - PL) - A_{34}^0{}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{4EJ}{L} + \frac{6EJ}{L} \frac{1}{4(kL)} \right] \left[\frac{3EJ}{L} \frac{1}{4(kL)} - \frac{EJ}{L} (kL)^2 \right] - \left[\frac{3EJ}{L} \frac{1}{4(kL)} \right]^2 = 0$$

| kL | 4(kL) | 5(kL) |
|------|--------|--------|
| 1.30 | 1,1345 | 1,872 |
| 1.35 | 1,1473 | 0,476 |
| 1.40 | 1,1610 | -0,956 |

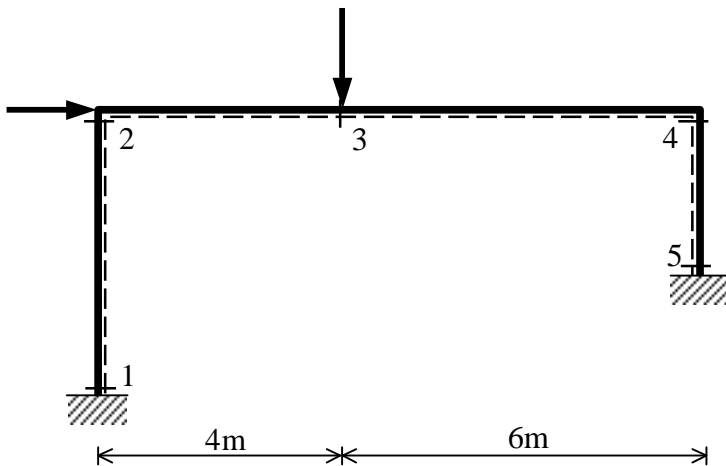
$\Rightarrow \psi(kL) = \left[4 + \frac{6}{4(kL)} \right] \left[\frac{3}{4(kL)} - (kL)^2 \right] - \frac{9}{4(kL)} = 0$
 $\Rightarrow kL = 1.37 \Rightarrow \underline{\underline{P_{k1} = 1.87 \frac{EJ}{L^2}}}$

4. Määritä oheisen kehän plastinen rajakuorma



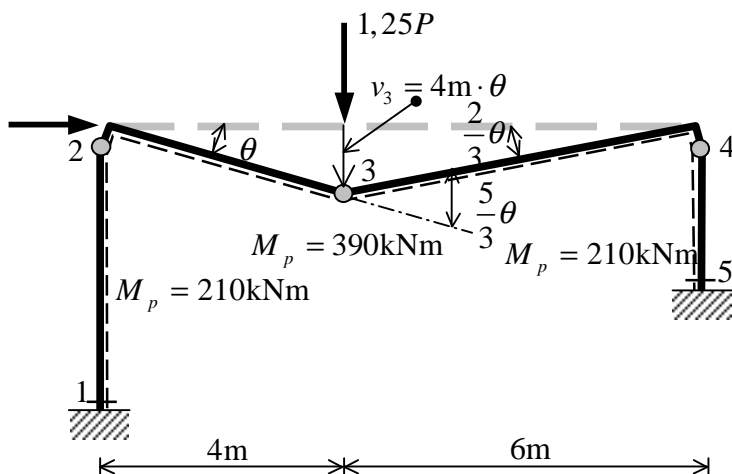
Ratkaisu:

Nivelten paikat ja perusmekanismien lukumäärä:



$$p = m - n_s = 5 - 3 = 2$$

Mekanismi (a): Palkkimekanismi



Mekanismin siirtymätilaa kuvaavaksi parametriksi otetaan sauvan 2–3 kaltevuuskulma θ . Geometrisellä tarkastelulla saadaan helposti kuvassa esitetyt kulmat ja nivelen 3 pystysiirtymä v_3 parametrin θ avulla lausuttuna.

Nivelten kulmanmuutokset:

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = -\theta, \theta_3 = \frac{5}{3}\theta, \theta_4 = -\frac{2}{3}\theta, \theta_5 = 0.$$

Virtuaalisen työn periaate:

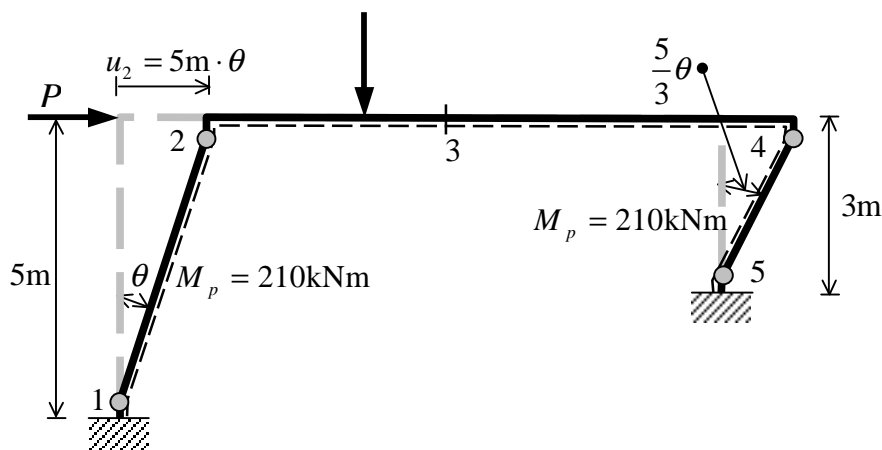
$$\begin{aligned} -W_{\text{int}} &= \sum M_{pi} |\theta_i| = M_{p2} |\theta_2| + M_{p3} |\theta_3| + M_{p4} |\theta_4| \\ &= 210\text{kNm} \cdot \theta + 390\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{2}{3}\theta = 1000\text{kNm} \cdot \theta \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = 1,25P \cdot v_3 = 1,25P \cdot 4\text{m} \cdot \theta = 5\text{m} \cdot P\theta$$

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow 1000\text{kNm} \cdot \theta = 5\text{m} \cdot P\theta$$

$$\Rightarrow \underline{P_p^{(a)} = 200\text{kN}}$$

Mekanismi (b): Sivusiirtymämekanismi



Mekanismin siirtymätilaa kuvaavaksi parametriksi otetaan sauvan 1–2 kaltevuuskulma θ .

Nivelten kulmanmuutokset:

$$\theta_1 = -\theta, \theta_2 = \theta, \theta_3 = 0, \theta_4 = -\frac{5}{3}\theta, \theta_5 = \frac{5}{3}\theta.$$

Virtuaalisen työn periaate:

$$\begin{aligned} -W_{\text{int}} &= \sum M_{pi} |\theta_i| = M_{p1} |\theta_1| + M_{p2} |\theta_2| + M_{p4} |\theta_4| + M_{p5} |\theta_5| \\ &= 210\text{kNm} \cdot \theta + 210\text{kNm} \cdot \theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta \\ &= 1120\text{kNm} \cdot \theta \end{aligned}$$

$$W_{\text{ext}} = P \cdot u_2 = P \cdot 5\text{m} \cdot \theta = 5\text{m} \cdot P\theta$$

$$-W_{\text{int}} = W_{\text{ext}} \Leftrightarrow 1120\text{kNm} \cdot \theta = 5\text{m} \cdot P\theta$$

$$\Rightarrow \underline{P_p^{(b)} = 224\text{kN}}$$

Mekanismien yhdistely:

| Mekanismi | θ_1 | θ_2 | θ_3 | θ_4 | θ_5 | $-W_{\text{int}}$ | W_{ext} | P_p |
|-------------------------------|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|-------------------------------|----------------------------|---------|
| (a) | 0 | $-\theta$ | $\frac{5}{3}\theta$ | $-\frac{2}{3}\theta$ | 0 | $1000\text{kNm} \cdot \theta$ | $5\text{m} \cdot P\theta$ | 200kN |
| (b) | $-\theta$ | θ | 0 | $-\frac{5}{3}\theta$ | $\frac{5}{3}\theta$ | $1120\text{kNm} \cdot \theta$ | $5\text{m} \cdot P\theta$ | 224kN |
| (c)=(a)+(b) | $-\theta$ | 0 | $\frac{5}{3}\theta$ | $-\frac{7}{3}\theta$ | $\frac{5}{3}\theta$ | $1700\text{kNm} \cdot \theta$ | $10\text{m} \cdot P\theta$ | 170kN |
| (d) = (a) - $\frac{2}{5}$ (b) | $\frac{2}{5}\theta$ | $-\frac{7}{5}\theta$ | $\frac{5}{3}\theta$ | 0 | $-\frac{2}{3}\theta$ | $1168\text{kNm} \cdot \theta$ | $3\text{m} \cdot P\theta$ | 389,3kN |

Yhdistelmämekanismien nivelten kulmanmuutokset saadaan laskemalla perusmekanismien nivelten kulmanmuutosten ao. lineaarikombinaatiot. Yhdistelmämekanismi (c) saatiin hävittämällä nivel 2 ja yhdistelmämekanismi (d) hävittämällä nivel 4. Yhdistelmämekanismien sisäiset virtuaaliset työt lasketaan tavanomaiseen tapaan:

Mekanismi (c):

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= \sum M_{pi} |\theta_i| \\ &= 210\text{kNm} \cdot \theta + 390\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{7}{3}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta \\ &= 1700\text{kNm} \cdot \theta \end{aligned}$$

Mekanismi (d):

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= \sum M_{pi} |\theta_i| \\ &= 210\text{kNm} \cdot \frac{2}{5}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{7}{5}\theta + 390\text{kNm} \cdot \frac{5}{3}\theta + 210\text{kNm} \cdot \frac{2}{3}\theta \\ &= 1168\text{kNm} \cdot \theta \end{aligned}$$

Yhdistelmämekanismien ulkoiset virtuaaliset työt saadaan laskemalla perusmekanismien virtuaalisten töiden ao. lineaarikombinaatiot. Yhdistelmämekanismien rajakuormat saadaan lopulta ratkaisemalla ao. virtuaalisen työn yhtälöt. Tulokset on merkitty taulukkoon.

Nähdään, että mekanismi (c) antaa pienimmän rajakuorman $P_p = 170\text{kN}$.