

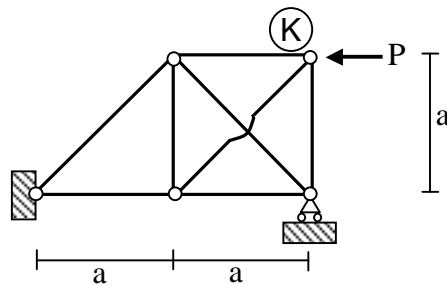
Rak-54.2100 RAKENTEIDEN MEKANIikka I

Tentti 9. 3. 2010

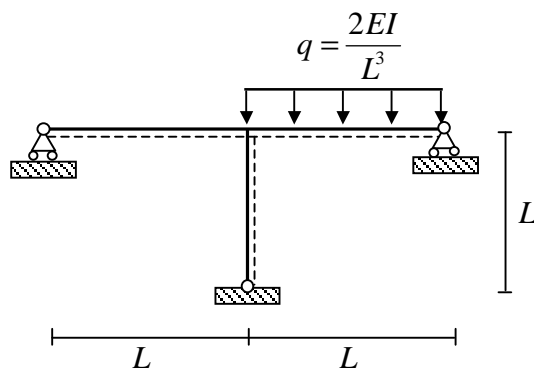
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi

- opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
- kaikki nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
- koulutusohjelma, opiskelijanumero, myös tarkistus kirjain
- milloin olet pakolliset kotitehtävät suorittanut sekä monettako kertaa olet tentissä

1. Määritä kuvan mukaisen ristikon nurkan K vaakasiirtymä voimasta $P = 10\text{kN}$? Sauvojen jäykkyys $EA = 20\text{ MN}$ ja $a = 1\text{ m}$.

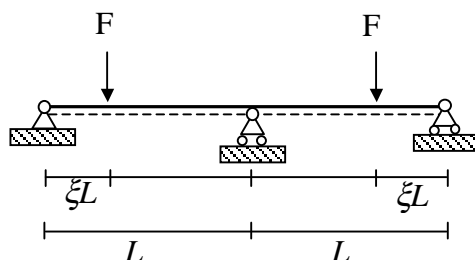


2. Määritä oheisen kehän taivutusmomenttikuvio ottamatta huomioon puristavan voiman vaikutusta. Kaikkien sauvojen jäykkyys on EI .



3. Määritä edellisen tehtävän kehän taivutusmomenttikuvio OTTAMALLA huomioon puristavan voiman vaikutus. Selvitä, miten määritetään kehän kriittinen kuorma q_{kr} ?

4. Mikä on oheisen jatkuvan palkin pienimmän rajakuorman arvo? Missä kuorma tällöin sijaitsee (ξ muuttuja)? Palkin täysplastinen momentti on M_p .



Ratkaisut:

1. Staattisesti määrätty perusmuoto:

$$S_{24} = -P$$

$$S_{45} = 0 \text{ (nollasauva)}$$

$$C_y = -P/2$$

$$\uparrow \frac{1}{\sqrt{2}} S_{25} = P/2$$

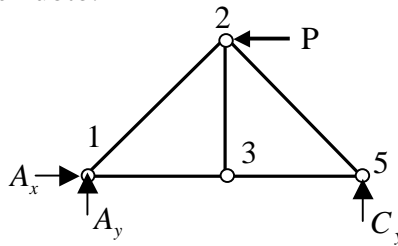
$$S_{25} = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

$$\leftarrow S_{35} = -\frac{1}{\sqrt{2}} S_{25} = -\frac{1}{2} P$$

$$S_{32} = 0 \text{ (nollasauva)}$$

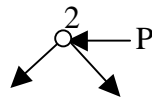
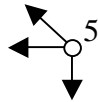
$$S_{13} = S_{35} = -\frac{1}{2} P$$

$$\leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} S_{12} + P - \frac{1}{\sqrt{2}} S_{25} = 0 \Leftrightarrow S_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{25} - P = -\frac{1}{2} P$$



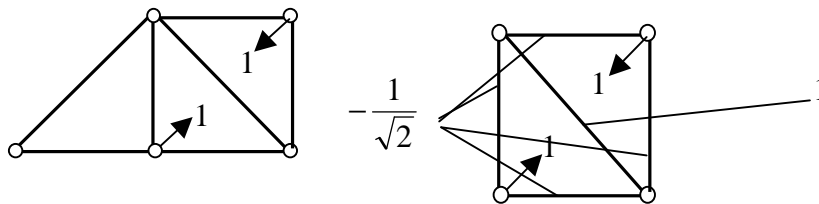
$$\sin(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$$

$$\cos(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$$



voima X=1, Ulkoiset tukireaktiot yksikkövoimasta = 0

Sauvat 12 ja 13 nollasauvoja, neliössä symmetrinen tilanne



n_i	L_i	S_i	\bar{S}_i	EA_i	$\delta_{10i} \left(\frac{L}{EA}\right)$	$\delta_{11i} \left(\frac{L}{EA}\right)$
12	$\sqrt{2}L$	$-P/2$	0	EA	0	0
13	L	$-P/2$	0	EA	0	0
23	L	0	$-1/\sqrt{2}$	EA	0	1/2
24	L	$-P$	$-1/\sqrt{2}$	EA	$P/\sqrt{2}$	1/2
25	$\sqrt{2}L$	$\sqrt{2}P/2$	1	EA	P	$\sqrt{2}$
34	$\sqrt{2}L$	0	1	EA	0	$\sqrt{2}$
35	L	$-P/2$	$-1/\sqrt{2}$	EA	$P/2\sqrt{2}$	1/2
45	L	0	$-1/\sqrt{2}$	EA	0	1/2

$$\delta_{10} = \left(\frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}\right) \frac{PL}{EA} \approx 2,061 \frac{PL}{EA} \quad \delta_{11} = 2 \cdot (1+\sqrt{2}) \frac{P}{EA} \approx 4,828 \frac{L}{EA}$$

$$\delta_{10} = X * \delta_{11} = 0 \Rightarrow X = -\delta_{10} / \delta_{11} = -0,427P$$

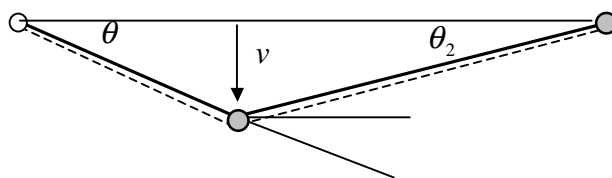
Todelliset sauvavoimat:

$$S_i = S_i^0 + X * S_i^1$$

n_i	L_i	S_i	$S_i \approx$	$\bar{S}_i = S_i(P=1)$ edellisestä taulukosta	EA_i	$\delta_{ki} \left(\frac{PL}{EA} \right)$
12	$\sqrt{2}L$	$-P/2$	-0,5	-1/2	EA	0,354
13	L	$-P/2$	-0,5	-1/2	EA	0,250
23	L	$-X/\sqrt{2}$	0,302	0	EA	0
24	L	$-P - X/\sqrt{2}$	-0,698	-1	EA	0,698
25	$\sqrt{2}L$	$\sqrt{2}P/2 + X$	0,280	$\sqrt{2}/2$	EA	0,280
34	$\sqrt{2}L$	X	-0,427	0	EA	0
35	L	$-P/2 - X/\sqrt{2}$	-0,198	-1/2	EA	0,099
45	L	$-X/\sqrt{2}$	0,302	0	EA	0

$$\delta_k = 1,681 \frac{PL}{EA} = 1,681 * 10kN * 1m / (20000kN) \approx 0,841mm$$

4.



$$v = \theta \xi L$$

$$\theta_2 = \frac{\theta \xi L}{L(1-\xi)} = \frac{\xi}{1-\xi} \theta$$

$$\theta_\xi = \theta + \theta_2 = \frac{(1-\xi) + \xi}{1-\xi} \theta = \frac{1}{1-\xi} \theta$$

$$W_s = M_p \left(\frac{1}{1-\xi} + \frac{\xi}{1-\xi} \right) \theta = \frac{1+\xi}{1-\xi} M_p \theta$$

$$W_u = Fv = F\theta \xi L$$

$$W_s = W_u \Leftrightarrow \frac{1+\xi}{1-\xi} M_p = F \xi L$$

$$F(\xi) = \frac{1+\xi}{(1-\xi)\xi} \frac{M_p}{L}$$

$$\frac{dF(\xi)}{d\xi} \frac{L}{M_p} = \frac{\xi - \xi^2 - (1+\xi) * (1-2\xi)}{(\xi - \xi^2)^2} = \frac{\xi - \xi^2 - (1-2\xi + \xi - 2\xi^2)}{(\xi - \xi^2)^2} = \frac{-1 + 2\xi + \xi^2}{(\xi - \xi^2)^2} = 0$$

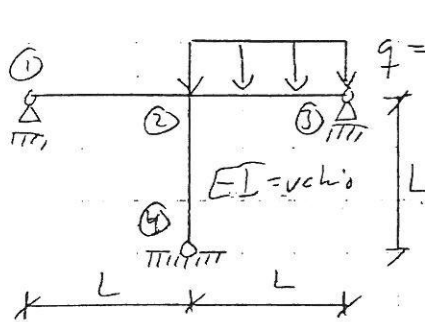
$$-1 + 2\xi + \xi^2 = 0 \Rightarrow \xi = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$$

$$F(0,414) \approx 5,828 \frac{M_p}{L}$$

Määritä oikein kehitin taivutusmomentti-käyriä

a) ottamalla huomioon paristuvan voiman vaikutukset

b) ottamalla huomioon paristuvan voiman vaikutus saavaksi 2-4



$$\begin{cases} \overline{M}_{21} + M_{23} + M_{24} = 0 \\ Q_{24} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{21}^0 + a_{23}^0 + a_{24}^0) \varphi_2 - c_{24}^0 \varphi_{24} = -MK_{23} \\ -a_{24}^0 \varphi_2 + c_{24}^0 \varphi_{24} = 0 \end{cases}$$

$$MK_{23}^0 = -\frac{qL^2}{8} = -\frac{1}{4} \frac{EI}{L}$$

$$a_{21}^0 = a_{23}^0 = a_{24}^0 = c_{24}^0 = \frac{3EI}{L}$$

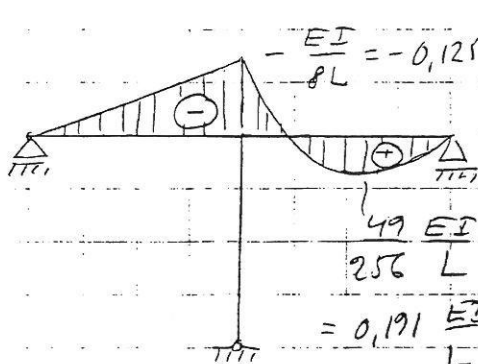
$$\Rightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{EI}{L}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_{24} \end{Bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/24 \\ 1/24 \end{Bmatrix}$$

$$M_{21} = a_{21}^0 \varphi_2 = \frac{3EI}{L} \cdot \frac{1}{24} = \frac{EI}{8L}$$

$$M_{24} = 0 \Rightarrow M_{23} = -\frac{EI}{8L}$$

Momentin max kohde saavaksi 2-3 $x \in [0, L]$



$$Q(x) = \frac{qL}{2} \left[1 - 2\left(\frac{x}{L}\right) \right] + \frac{EI}{8L^2}$$

$$= \frac{9EI}{8L^2} - \frac{2EI}{L^2} \left(\frac{x}{L}\right)$$

$$Q(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{L}\right) = \frac{9}{16}$$

$$M(x) = \frac{9L^2}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right) \right] \left(\frac{x}{L}\right) + M_{23} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right) \right]$$

$$\Rightarrow M(x) = -\frac{EI}{8L} + \frac{9EI}{8L} \left(\frac{x}{L}\right) - \frac{EI}{L} \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$M\left(\frac{9}{16}L\right) = \frac{49}{256} \frac{EI}{L}$$

b) Tsp. yhtöt.
$$\begin{cases} M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0 \\ Q_{24} = 0 \end{cases}$$

$$M_{21} = A_{21}^0 \varphi_2, \quad M_{23} = A_{23}^0 \varphi_2 + M_{K23}^0, \quad M_{24} = A_{24}^0 \varphi_2 - C_{24}^0 \varphi_{24}$$

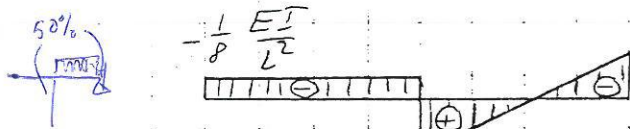
$$Q_{24} = Q_{24}^0 - \frac{M_{24}}{L} - P \varphi_{24} = 0 \Rightarrow -A_{24}^0 \varphi_2 + (C_{24}^0 - PL) \varphi_{24} = 0$$

$$A_{24}^0 = C_{24}^0 = \frac{3EI}{L \psi(kL)} \quad k^2 = \frac{N_{24}}{EI}$$

MUOH! A/s sakeite seurekieritymif φ i < Berryn funktiot $\psi(kL)$

$$\Rightarrow \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 6 + \frac{3}{\psi(kL)} & -\frac{3}{\psi(kL)} \\ -\frac{3}{\psi(kL)} & \frac{3}{\psi(kL)} - (kL)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_{24} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sauvon 2-4. normalivoimien alkueruus saadaan lineaarinen ratkaisuun leikkauvoimahaavion avulla



(myös alkueruus (pistelet/pistelet) eli $N_{24} = \frac{EI}{L^2}$ on OK)

$$\Rightarrow N_{24} = \frac{10}{8} \frac{EI}{L^2} = \frac{5}{4} \frac{EI}{L^2}$$

$$\Rightarrow kL = \sqrt{\frac{5}{4}} = 1,118$$

$$\Rightarrow \psi(kL=1,118) = 1,09$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 8,752 & -2,752 \\ -2,752 & 1,502 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0674 \\ 0,1235 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{21} = \frac{3EI}{L} \cdot 0,0674 = 0,202 \frac{EI}{L} \\ M_{23} = \frac{3EI}{L} \cdot 0,0674 - \frac{1}{4} \frac{EI}{L} = -0,0478 \frac{EI}{L} \\ M_{24} = -M_{21} - M_{23} = -0,1542 \frac{EI}{L} \end{cases}$$