

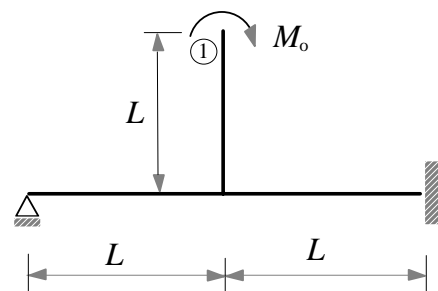
Rak-54.2100 Rakenteiden mekaniikka I, RM I 4op

Tentti 16. 12. 2008

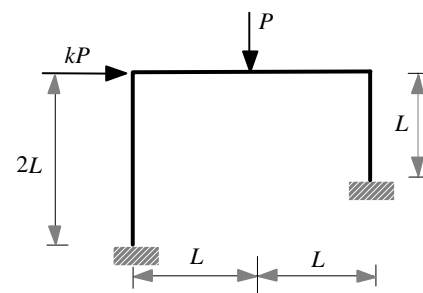
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi

- koko nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
- osasto, vuosikurssi tentin päivämäärä sekä tentittävä opintojakso koodeineen
- opiskelijanumerosi (mukaanlukien tarkastuskirjain)
- monettako kertaa olet ko. opintojaksoa suorittamassa
- minä vuonna olet suorittanut pakolliset harjoitustehtävät

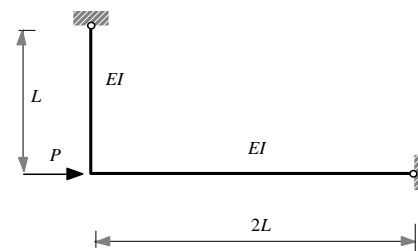
1. Määritä oheisen kehärakenteen taivutusmomentti-jakauma. Kuormituksena on pystysauvan vapaassa päässä (nurkka 1) vaikuttava pistemäinen taivutusmomentti. Kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on EI . Määritä lisäksi nurkan 1 vaakasiirtymä.



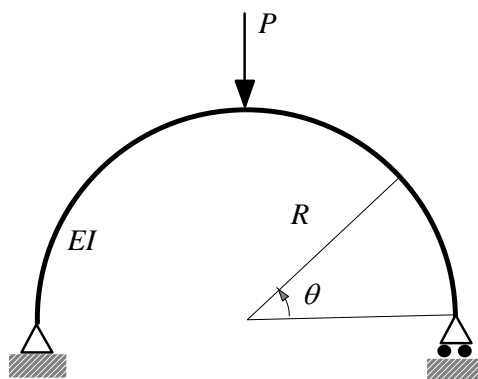
2. Oheista kehää kuormittaa kaksi pistekuormaa, joista toisen intensiteetti määräytyy kertoimen k avulla. Tutki, mikä mekanismi kulloinkin määrittää kehän rajakuorman ja mikä rajakuorman arvo on kertoimen k saadessa eri arvoja. Huomaa, että kerroin k voi saada myös negatiivisia arvoja. Kaikkien sauvojen täysplastinen momentti on M_p .



3. Määritä viereisen kehän kriittinen kuorma P_{kr} .



4. Määritä oheisen ympyränkaaren muodonmuutos-energian lauseke, kun kaarta kuormittaa pistekuorma kaaren lakipisteessä. Kaaren taivutusjäykkyys on EI . Määritä edelleen lakipisteen taipuma. Ohje: käytä kulmaa θ muuttujana, tällöin kaarenpituutta mittaa suure $R\theta$.

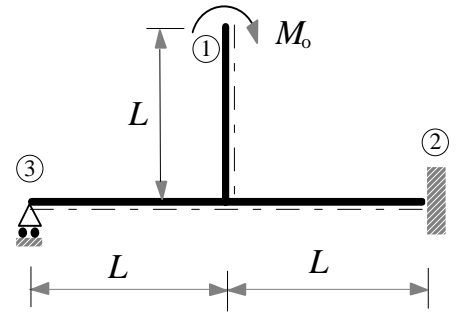


Rak-54.101 RAKENTEIDEN MEKANIikka I
Tentti 16.12.2008

RATKAISUT

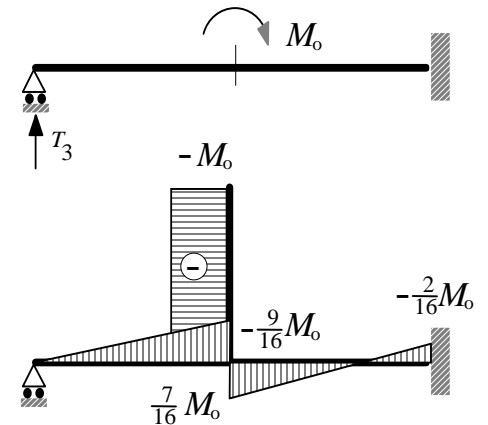
$$1. \varphi_{23} = \alpha_{23} M_{23} + \alpha_{23}^0 = \frac{2L}{3EI} M_{23} - \frac{1}{12} \frac{M_0 L}{EI} = 0 \Rightarrow M_{23} = \frac{M_0}{8}$$

$$2LT_3 + M_0 = -\frac{M_0}{8} \Rightarrow T_3 = -\frac{9}{16} \frac{M_0}{L}$$

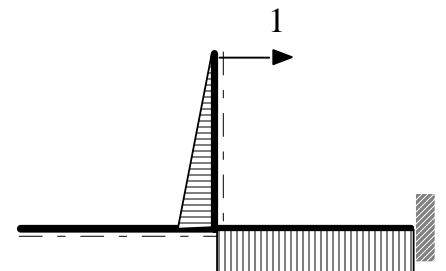
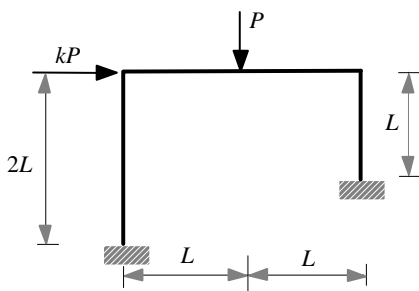


Nurkan 1 vaakasiirtymä esim. yksikkövoimamenetelmällä

$$v_1 = \sum_{\text{sauvat}} \int_0^L \frac{M\tilde{M}}{EI} dx = \frac{M_0 L^2}{EI} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{32} \right) = \frac{21}{32} \frac{M_0 L^2}{EI}$$



2.



Perusmekanismeja 5-3=2

Mekanismi a) $P\theta L = 4M_p \theta \Rightarrow P = \frac{4M_p}{L}$

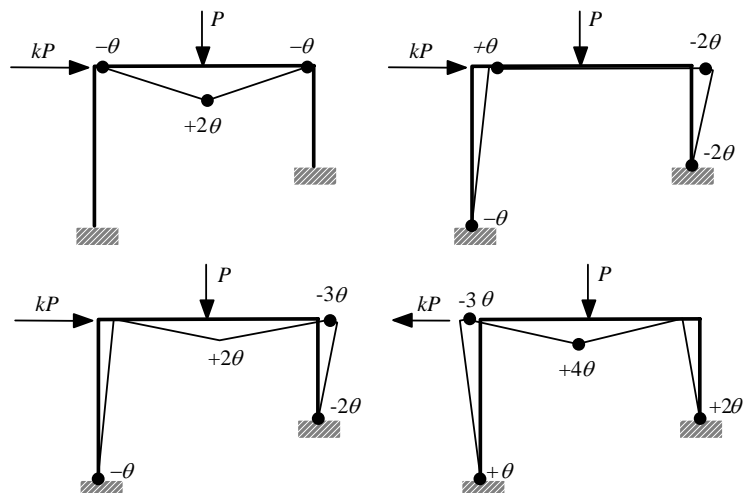
Mekanismi b) $kP\theta 2L = 6M_p \theta \Rightarrow P = \frac{3M_p}{kL}$

Yhdistelmämekanismi a+b) ($k > 0$)

$$P\theta L(1+2k) = 8M_p \theta \Rightarrow P = \frac{8M_p}{(1+2k)L}$$

Yhdistelmämekanismi 2a-b) ($k < 0$)

$$P\theta L(2+2k) = 10M_p \theta \Rightarrow P = \frac{5M_p}{(1+k)L}$$

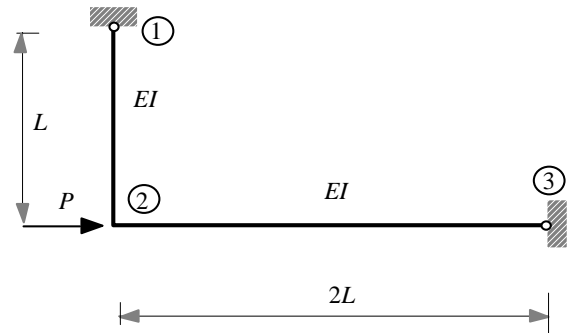


$$\text{Yhteenvedo: Rajakuorma } P_p = \begin{cases} \frac{3}{|k|} & k \leq -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{1+|k|} & -\frac{3}{2} \leq k \leq -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} \leq k \leq 0 \end{cases} \quad P_p = \begin{cases} 4 & 0 \leq k \leq \frac{1}{2} \\ \frac{8}{1+2k} & \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \\ \frac{3}{k} & k \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

3. Käytetään kulmanmuutosmenetelmää (kehä sivusiirtymätön)

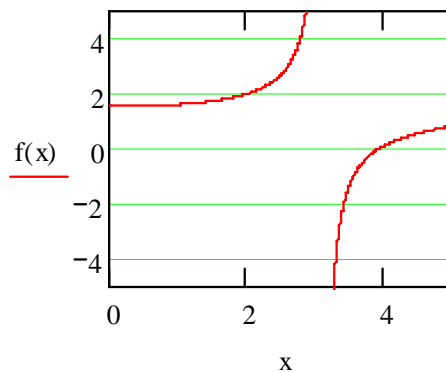
$$M_{21} = a_{21}^0 \varphi_{21} = \frac{3EI}{L} \varphi_{21} = \frac{3EI}{L} \varphi_2$$

$$M_{23} = A_{23}^0 \varphi_{23} = \frac{3EI}{2L} \frac{1}{\psi(2kL)} \varphi_{23} = \frac{3EI}{2L} \frac{1}{\psi(2kL)} \varphi_2$$



Tasapainoehto

$$M_{21} + M_{23} = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{3EI}{L} \varphi_2 = 0 \Rightarrow \psi(2kL) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2kL \approx 4 \Rightarrow P_{kr} \approx \frac{16EI}{(2L)^2} \approx 1.62 \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$



4. Kaaren muodonmuutosenergia on

$$U = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2}{2EI} R d\theta \quad \text{ja} \quad M = \frac{P}{2} R (1 - \cos \theta)$$

Näin saadaan

$$U = \frac{P^2 R^3}{4EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{P^2 R^3}{4EI} \left[\theta - 2 \sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{P^2 R^3}{4EI} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right)$$

Lakipisteen siirtymä saadaan soveltamalla Castiglianon periaatetta

$$v_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PR^3}{2EI} \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right)$$

