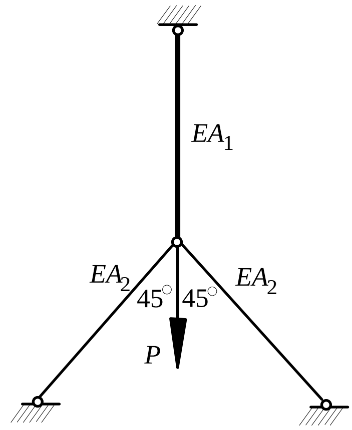
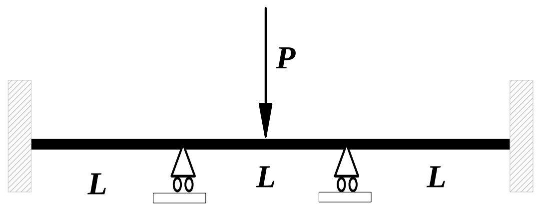
Rak-54.2100 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA I
Tentti 15. 12. 2009

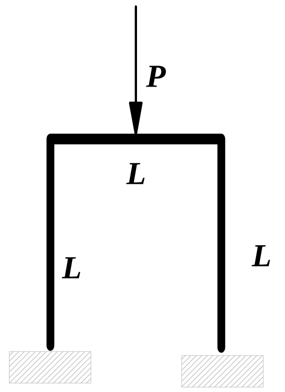
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
- kaikki nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
- koulutusohjelma, opiskelijanumero, myös tarkistuskirjain
- milloin olet pakolliset kotitehtävät suorittanut sekä monettako kertaa olet tentissä

1. Oheinen ristikko koostuu kolmesta sauvasta, joiden kaikkien pituus on ℓ. Määritä sauvojen pinta-alojen suhde A_1 / A_2 siten, että kaikkiin sauvoihin syntyy oheisesta kuormituksesta itseisarvoltaan yhtä suuri normaalijännitys. Mikä on tällöin kuormitetun nurkan pystysuora siirtymä?

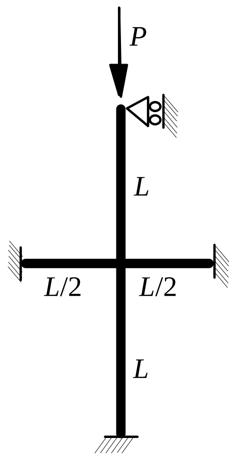


2. Määritä ja piirrä oheisen jatkuvan palkin ja kehän taivutusmomentti- ja leikkausvoimajakaumat. Kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on EI.

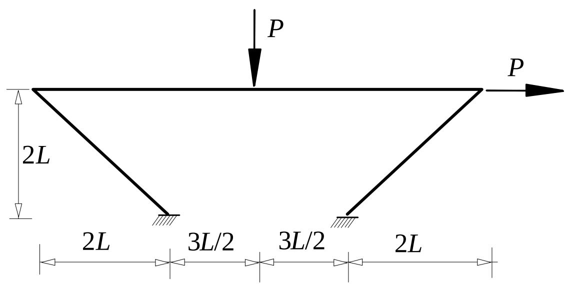




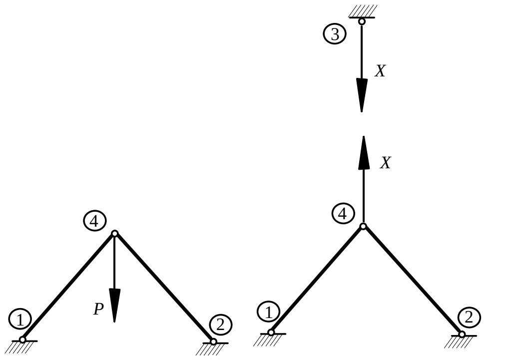
3. Määritä oheisen kehän kriittisen kuormaparametrin P_{kr} arvo. Kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on EI.



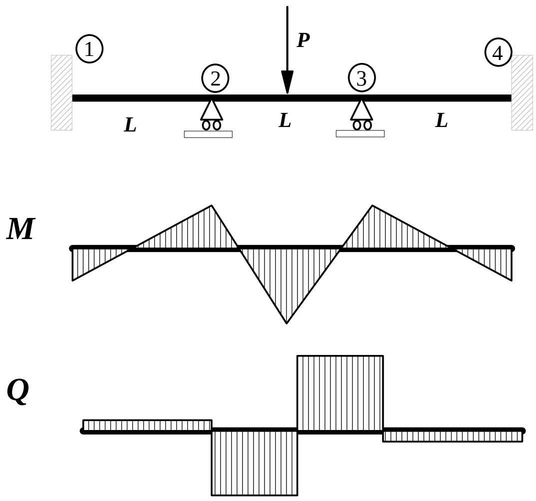
4. Määritä oheisen vinojalkaisen kehän rajakuorman P_{p} arvo käyttämällä mekanismimenetelmää. Kaikkien sauvojen täysplastisen momentin arvo on M_p. Tarkasta lisäksi, että myötöehto toteutuu koko rakenteessa konstruoimalla tasapainoehdot toteuttava taivutusmomenttijakauma.



Rak-54.2100 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA I
Tentti 15.12.2009 Ratkaisut:



1. Rakenne on kerran staattisesti määräämätön. Poistetaan aluksi sauva 43. Tällöin perusmuodossa sauvavoimat ovat $S^{o}_{41} = -P/\sqrt{2} = S^{o}_{42}$. Korvataan poistettu sauva voimalla *X*, josta aiheutuu sauvavoimat $S^{1}_{41} = S^{1}_{42} = X/\sqrt{2}$. Yhteensopivuusehto $\delta_{10} + \delta_{11} = 0$, jossa $\delta_{10} = 2S^{o}_{41}S^{1}_{41}\ell/EA_2 = -PXR/EA_2$ ja $\delta_{11} = 2(S^{1}_{41})^2\ell/EA_2 + (S^{1}_{43})^2\ell/EA_1 = X^2\ell(1/EA_1 + 1/EA_2)$
Jos merkitään $\xi = A_1/A_2$, saadaan $X = S_{43} = P\xi/(1+\xi)$ ja sauvavoimat $S_{41} = S_{42} = (X-P)/\sqrt{2} = -P/\sqrt{2}(1+\xi)$. Nurkan 4 pystysiirtymä on suoraan sauvan 43 venymä eli $\delta_4 = X\ell/EA_1 = P\ell\xi/EA_1(1+\xi) = P\ell/E(A_1+A_2)$. Jotta jännitykset sauvoissa olisivat itseisarvoltaan yhtäsuuret, tulee ehdon $\sigma_1 = |\sigma_2| \Rightarrow S_{43}/A_1 = |S_{41}|/A_2 \Rightarrow$ $\xi P/(1+\xi) = \xi P/\sqrt{2}(1+\xi)$ toteutua. Tämä toteutuu vain, kun pinta-alojen suhde $\xi \to \infty$. Sen sijaan sauvavoimat ovat yhtäsuuret, eli $|S_{41}| = S_{43}$, jos $\xi = A_1/A_2 = 1/\sqrt{2}$.



2. Sauvanpäämomentit (symmetria huomioiden)

$$\underbrace{M_{21}}_{-M_2} = \frac{4EI}{L}\underbrace{\varphi_{21}}_{\varphi_2}, \quad \underbrace{M_{23}}_{M_2} = \frac{4EI}{L}\underbrace{\varphi_{23}}_{\varphi_2} + \frac{2EI}{L}\underbrace{\varphi_{32}}_{-\varphi_2} + \underbrace{MK_{23}}_{-\frac{1}{8}FL}$$

Tasapainoehdon mukaan $M_{21} + M_{23} = 0$, josta saadaan

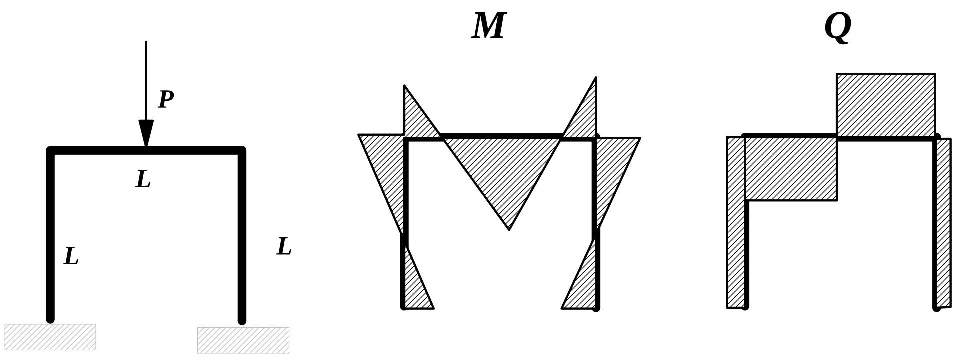
$\varphi_2 = \dfrac{PL^2}{48EI}$. Tällöin $M_{12} = \dfrac{2EI}{L}\varphi_2 = \frac{1}{24}PL = M_{43}$, ja

$M_2 = M_{23} = -M_{21} = -\frac{1}{12}PL = -M_{32} = M_3$,

$M_P = \frac{1}{4}PL - \frac{1}{12}PL = \frac{1}{6}PL$ Leikkausvoimat ovat paloittain vakioita

$Q_{12} = -\frac{3}{24}P,\ Q_{21} = \frac{1}{2}P,\ Q_{32} = -\frac{1}{2}P,\ Q_{34} = \frac{3}{24}P$

Kehän taivutusmomentti- ja leikkausvoimajakaumat ovat identtiset palkin kanssa.



3. Käytetään kulmanmuutosmenetelmää. Tällöin saadaan

$M_{51}=A^{o}_{51}\varphi_5,\ M_{52}=a_{52}\varphi_5,\ M_{53}=a_{53}\varphi_5, M_{54}=A_{54}\varphi_5$

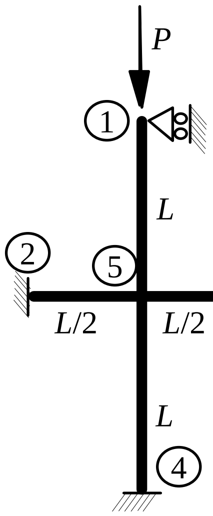
Ja tasapainoehdoista $M_{51}+M_{52}+M_{53}+M_{54}=0$ saadaan homogeeninen yhtälö $(A^{o}_{51}+a_{52}+a_{53}+A_{54})\varphi_5=0$. Tämä toteutuu, kun $\varphi_5\neq 0$, jos $A^{o}_{51}+a_{52}+a_{53}+A_{54}=0$. Kun $A^{o}_{51}=3EI/\Psi L,$

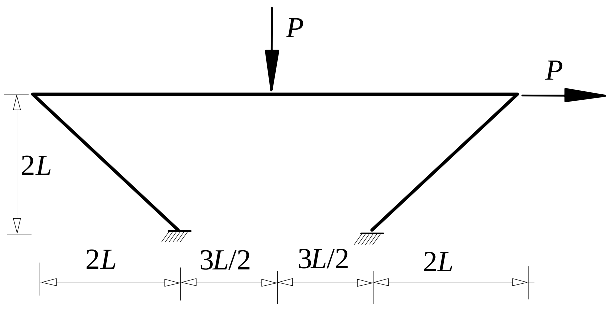
$a_{52}=a_{53}=8EI/L, A_{54}=12EI\Psi/\left(4\Psi^2-\Phi^2\right)L$, ja $k^2=P/EI$

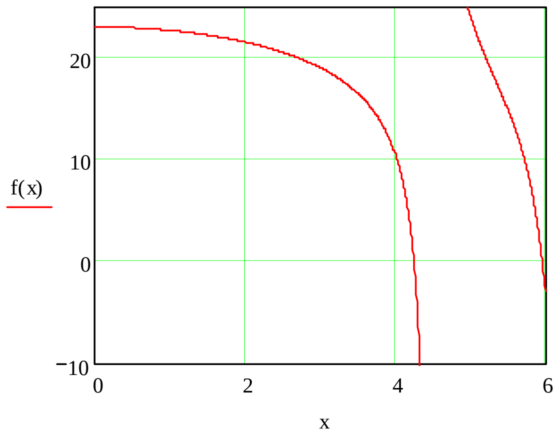
$$\Psi=\Psi(kL)=\frac{3}{kL}\left(\frac{1}{kL}-\frac{1}{\tan kL}\right),\ \Phi=\Phi(kL)=\frac{6}{kL}\left(\frac{1}{\sin kL}-\frac{1}{kL}\right).$$

Sijoittamalla lausekkeet saadaan funktio, jonka kuvaaja on ohessa.

$x=kL=4.246\Rightarrow P=4.246^2EI/L^2=18.03EI/L^2=1.827\pi^2EI/L^2$.







4. Tarkastellaan aluksi palkkimekanismia (a):

$4M_p\theta=\frac{7}{2}P\theta L\Rightarrow P=\frac{8}{7}M_p/L$

Sivusiirtymämekanismi (b):

$\frac{20}{7}M_p\theta=2P\theta L\Rightarrow P=\frac{10}{7}M_p/L$.

Yhdistelmämekanismi $(\frac{3}{7}a+b)$:

$\frac{26}{7}M_p\theta=(\frac{3}{7}\frac{7}{2}+2)P\theta L\Rightarrow P=\frac{52}{49}M_p/L$

Yhdistelmämekanismi antaa pienimmän rajakuorman. Tarkastetaan momentti nurkassa 2 käyttäen palkkimekanismia

$(-\theta)M_2+2\theta M_p+(-\theta)(-M_p)=\frac{52}{49}M_p/L\cdot\frac{7}{2}\theta L$

$\Rightarrow M_2=\frac{5}{7}M_p$, joten $|M|\leq M_p$ kaikkialla.