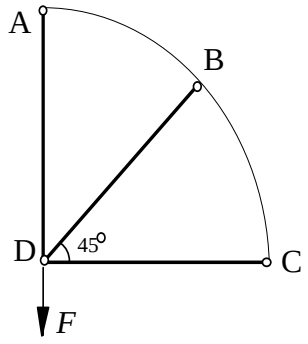
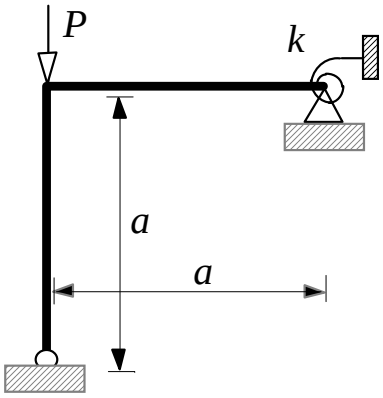
Rak-54.2100 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA I
Tentti 10.3.2009

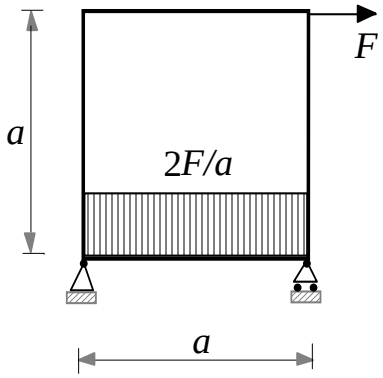
Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
- kaikki nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
- koulutusohjelma, opiskelijanumero, myös tarkistuskirjain
- milloin olet pakolliset kotitehtävät suorittanut sekä monettako kertaa olet tentissä



1. Kolme ristikkosauvaa on kiinnitetty *R*-säteisen ympyrän muotoiselle tukipinnalle ABC oheisen kuvion mukaisesti. Rakennetta kuormittaa alaspäin suuntautuva pystysuora voima *F* nurkassa D. Määritä kuhunkin sauvaan syntyvä sauvavoima sekä nurkan D vaakasuora siirtymä. Kaikkien sauvojen jäykkyys on *EA*.

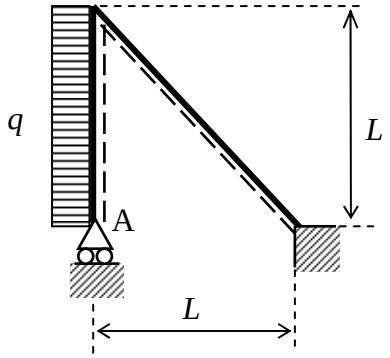
2. Oheista kulmakehää, joka on tuettu kierrejousella – jousivakio *k* - vaakasauvan toisessa päässä, kuormittaa pistekuorma *P* kehän nurkassa. Arvioi rakenteen nurjahduksen suhteen kriittisen kuorman arvoa. Ratkaisuksi riittää se yhtälö, josta tulos voidaan iteratiivisesti määrittää. Kummankin sauvan taivutusjäykkyys on *EI*, $k=EI/a$.





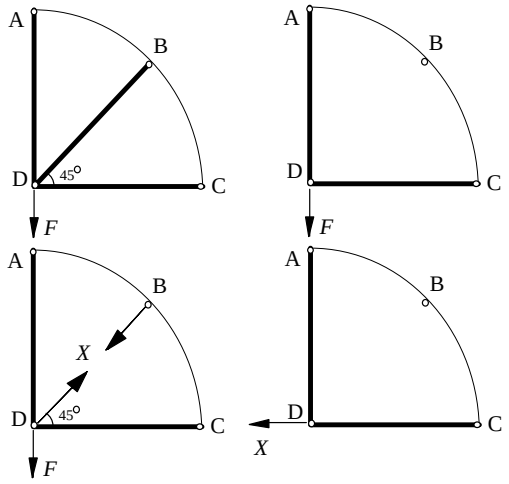
3. Oheisessa rengaskehässä (yllä) vaakasauvojen täysplastinen momentti on M_{p1} ja pystysauvojen vastaavasti M_{p2}. Määritä täysplastisten momenttien arvot siten, että rakenne kantaa annetun kuormituksen ja lisäksi edellytetään, että M_{p2} on mahdollisimman pieni.

4. Määritä ja piirrä oheisen tasokehän taivutusmomenttikuvio ja laske tuen A vaakasiirtymä. Kummankin sauvan taivutusjäykkyys on *EI*.



Rak-54.2100 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA I

Tentti 10.3.2009 Ratkaisut:



1. Rakenne on kerran staattisesti määräämätön. Poistetaan aluksi sauva BD. Tällöin perusmuodossa sauvavoimat ovat

$S^{o}_{AD} = F$, $S^{o}_{CD} = 0$. Korvataan poistettu sauva voimalla X, josta aiheutuu sauvavoimat $S^{1}_{AD} = S^{1}_{CD} = -X/\sqrt{2}$.

Yhteensopivuusehto

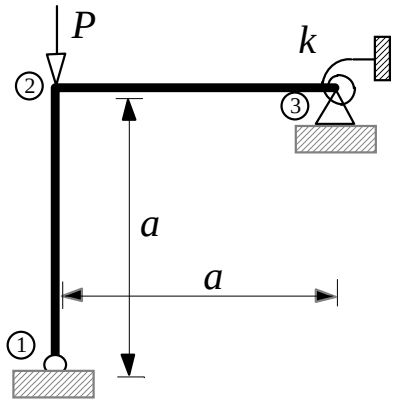
$\delta_{10} + \delta_{11} = 0$, jossa $\delta_{10} = S^{o}_{AD} S^{1}_{AD} R/EA = -FXR/\sqrt{2}EA$

ja $\delta_{11} = ((S^{1}_{AD})^2 + (S^{1}_{BD})^2 + (S^{1}_{CD})^2)R/EA = 2X^2R/EA$

Tällöin $X = F/2\sqrt{2}$ ja sauvavoimat ovat

$S_{AD} = F - X/\sqrt{2} = 3F/4$,

$S_{BD} = X = F/2\sqrt{2}$, $S_{CD} = -X/\sqrt{2} = -F/4$. Nurkan D vaakasiirtymä saadaan asettamalla staattisesti määrätyn rakenteen nurkkaan D ykkösen suuruinen vaakavoima, joka aiheuttaa vain sauvaan CD sauvavoiman 1. Tällöin kysytty vaakasiirtymä, eli vaakasauvan kokoonpuristuma on $\delta_D = -FR/4EA$.



2. Käytetään kulmanmuutosmenetelmää. Tällöin saadaan

$M_{21} = A^{o}_{21}\varphi_2$, $M_{23} = a_{23}\varphi_2 - b_{32}\varphi_3$, $M_{32} = a_{32}\varphi_3 - b_{23}\varphi_2$, $M_{3j} = k\varphi_3$

Ja tasapainoehdoista $M_{21} + M_{23} = 0$ ja $M_{32} + M_{3j} = 0$ saadaan

Homogeeninen yhtälösysteemi $\mathbf{K}\varphi = \mathbf{0}$, eli

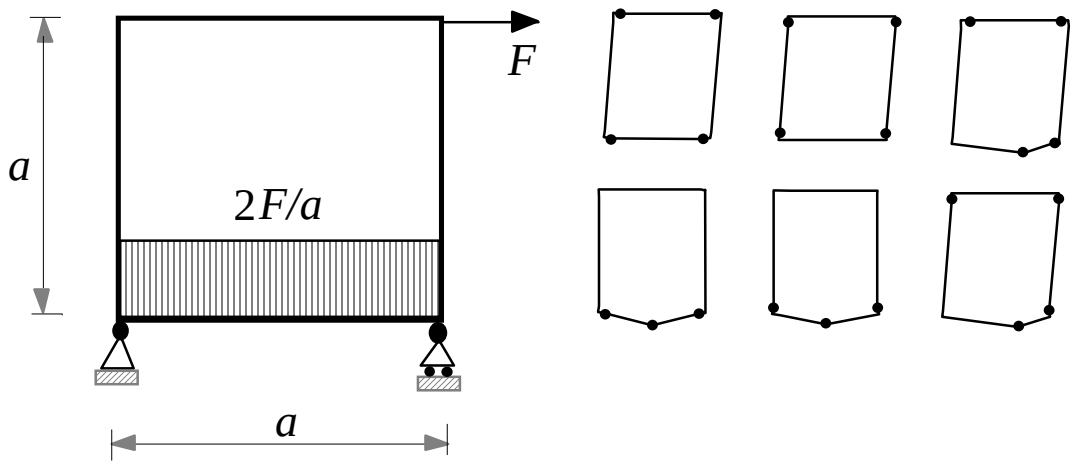
$$\begin{bmatrix} A^{o}_{21} + a_{23} & b_{32} \\ b_{23} & a_{32} + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$, jonka kerroinmatriisin

determinantti häviää kehän nurjahtaessa, eli $\det \mathbf{K} = 0$. Tästä saadaan ehto $(A^{o}_{21} + a_{23})(a_{32} + k) - b^2_{23} = 0$. Kun otetaan huomioon, että

$A^{o}_{21} = 3EI/\Psi(\bar{k}a)a$, $a_{23} = a_{32} = 4EI/a$, $b_{23} = b_{32} = 2EI/a$, $k = EI/a$ ja $\bar{k} = \sqrt{P/EI}$ saadaan

yhtälö $\Psi(\bar{k}a) = \frac{3}{\bar{k}a}\left(\frac{1}{\bar{k}a} - \frac{1}{\tan \bar{k}a}\right) = -\frac{15}{16}$. Yhtälön ratkaisu on

$\bar{k}a \approx 3.75$, josta $P_{kr} = 3.75^2 EI/a^2 = 1.42\pi^2 EI/a^2$.



3. Tarkastellaan sivusiirtymämekanismia. Jos $M_{p1} < M_{p2}$, kaikki nivelet syntyvät vaakasauvojen puolelle ja rajakuormaksi saadaan $4M_{p1}\theta = F\theta a \Rightarrow M_{p1} = Fa/4$. Jos taas $M_{p1} > M_{p2}$ kaikki nivelet syntyvät pystysauvojen puolelle ja $4M_{p2}\theta = F\theta a \Rightarrow$ $M_{p2} = Fa/4$. Tästä voidaan päätellä, että M_{p2} ei voi olla pienempi kuin *Fa*/4. M_{p1} voidaan määrittää yhdistetyn mekanismin avulla, jolloin ($M_{p1} > M_{p2}$) (palkkimekanismi ei määritä milloinkaan rajakuormaa)

$\frac{1}{1-\xi}M_{p1}\theta + (3+\frac{\xi}{1-\xi})M_{p2}\theta = F\theta a + F\theta\xi a$, josta saadaan

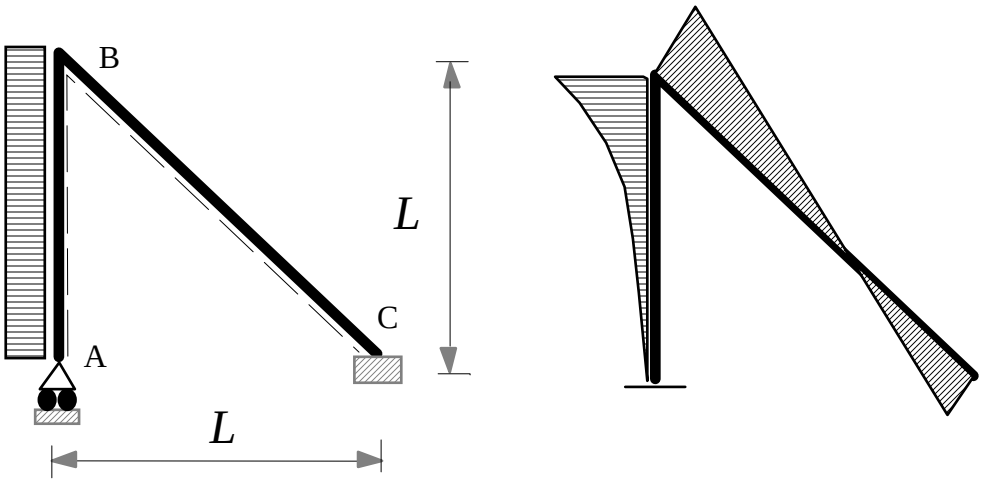
$M_{p1} = (\frac{1}{4}+\frac{\xi}{2}-\xi^2)Fa \Rightarrow \frac{\mathrm{d}M_{p1}}{\mathrm{d}\xi} = (\frac{1}{2}-2\xi)Fa \Rightarrow \xi = \frac{1}{4} \Rightarrow M_{p1} = \frac{5}{16}Fa$ ja $M_{p2} = \frac{1}{4}Fa$

4. Koska tuella A on vain pystysuora tukireaktio, momentti nurkassa B on $M_B = -qL^2/2$.

Tällöin sauvanpäämomentit ovat $M_{BA} = -M_{BC} = \frac{qL^2}{2}$. Toisaalta on

$M_{BC} = \frac{4EI}{L\sqrt{2}}\varphi_{BC}$ $(\psi_{BC} = 0)$, joten $\varphi_{BC} = \varphi_B = -\frac{qL^3\sqrt{2}}{8EI}$ ja momentti $M_{CB} = \frac{2EI}{L\sqrt{2}}\varphi_{BC} = \frac{qL^2}{4}$.

Edelleen $M_{BA} = \frac{4EI}{L}(\underbrace{\varphi_{BA}}_{=\varphi_B} - \psi_{BA}) + MK^{\circ}_{BA} = -\frac{qL^2\sqrt{2}}{2} - \frac{4EI}{L}\psi_{BA} + \frac{qL^2}{8}$

$\Rightarrow \psi_{BA} = -\frac{3+4\sqrt{2}}{32}\frac{qL^3}{EI}$ ja nurkan A kysytty vaakasiirtymä

$\delta_A = \psi_{BA}L = -\frac{3+4\sqrt{2}}{32}\frac{qL^4}{EI}$ (oikealle)