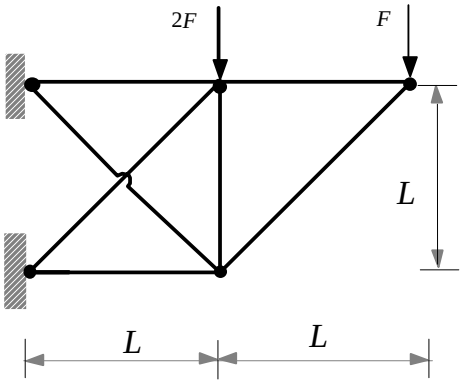
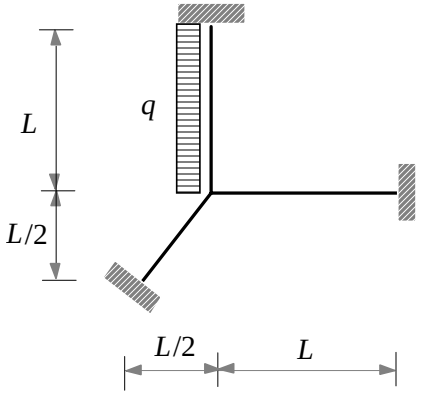
Rak-54.2100 Rakenteiden mekaniikka I
Tentti 14.01.2009

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- koko nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
- osasto, vuosikurssi tentin päivämäärä sekä tentittävä opintojakso koodeineen
- opiskelijanumero (mukaan lukien tarkastuskirjain)
- monettako kertaa olet ko. opintojaksoa suorittamassa
- minä vuonna olet suorittanut pakolliset harjoitustehtävät

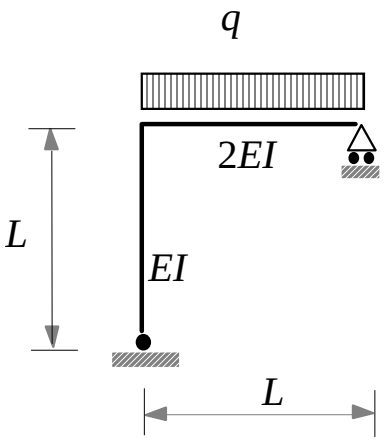
1. Määritä oheisen ristikon sauvavoimat. Kaikilla sauvoilla on sama kimmokerroin E ja poikkileikkausala A.



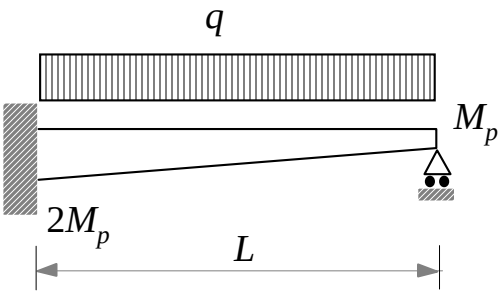
2. Määritä oheisen kehän taivutusmomentti- ja leikkausvoimajakaumat.. Kaikkien sauvojen taivutusjäykkyys on EI.



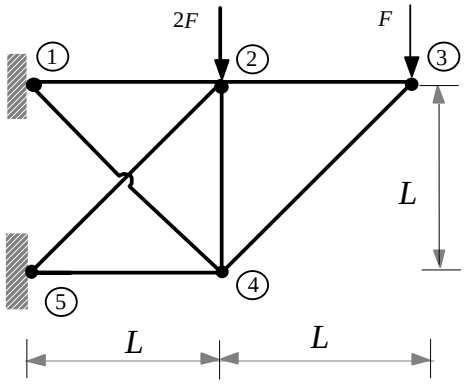
3. Oheista kulmakehää kuormittaa tasan jakaantunut kuormitus q vaakapalkilla. Vaakasauvan taivutusjäykkyys on $2EI$ ja pystysauvan EI. Pystysauvaa käsitellään puristetun-taivutetun sauvan teoriaa soveltaen. Määritä kehän nurkkamomentin arvo, kun q=80 kN/m, EI=2.1 MNm^2, L=6.0 m. Ohje: Jaa aluksi kuorma tasan kumpaankin vaakasauvan päähän, ja tarkenna kuorman jakaantumista toisella iteraatiokierroksella.. Kaksi iteraatiokierrosta tarkastelussa riittää.

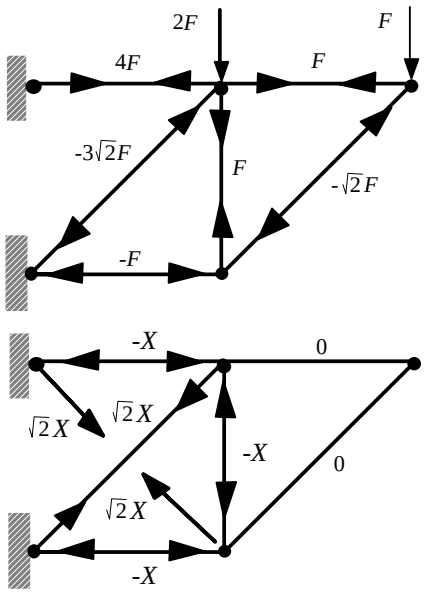


4. Oheisessa sauvassa täysplastisen momentin arvo kasvaa lineaarisesti arvosta M_p sauvan toisessa päässä arvoon $2M_p$ toisessa. Määritä suurin kuorma q_p, jonka palkki voi kantaa.



Rak-54.2100 Rakenteiden mekaniikka I
Tentti 14.01.2009, Ratkaisut



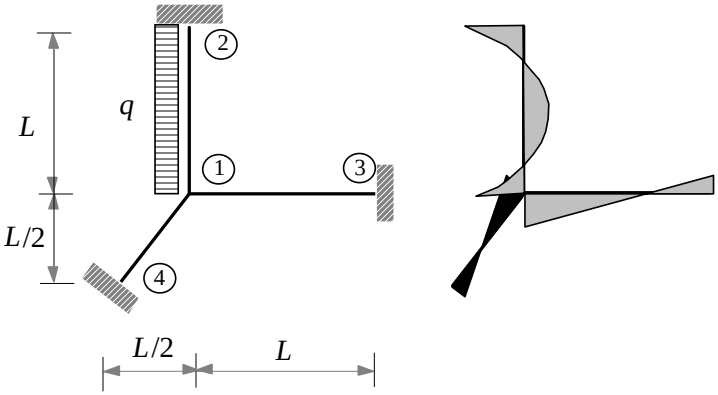


nro	L_i	$(EA)_i$	S_F	S_X	δ_{10}^i	δ_{11}^i	Lopullinen sauvavoima
12	L	EA	$4F$	$-X$	$-\frac{4FXL}{EA}$	$\frac{X^2L}{EA}$	$\frac{32+34\sqrt{2}}{23}F \approx 3,48F$
14	$L\sqrt{2}$	EA	0	$\sqrt{2}X$	0	$\frac{2\sqrt{2}X^2L}{EA}$	$\frac{60\sqrt{2}-68}{23}F \approx 0,73F$
24	L	EA	F	$-X$	$-\frac{FXL}{EA}$	$\frac{X^2L}{EA}$	$\frac{34\sqrt{2}-37}{23}F \approx 0,48F$
25	$L\sqrt{2}$	EA	$-3\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}X$	$\frac{6\sqrt{2}FXL}{EA}$	$\frac{2\sqrt{2}X^2L}{EA}$	$\frac{-9\sqrt{2}-68}{23}F \approx -3,51F$
54	L	EA	$-F$	$-X$	$\frac{FXL}{EA}$	$\frac{X^2L}{EA}$	$\frac{34\sqrt{2}-83}{23}F \approx -1,52F$
23	L	EA	F	0	0	0	F
34	$L\sqrt{2}$	EA	$-\sqrt{2}F$	0	0	0	$-\sqrt{2}F \approx -1,41F$

$$\delta_{10} = \sum_{\text{sauvat}} \frac{S_{F_i} S_{X_i} L_i}{(EA)_i} = \frac{(6\sqrt{2}-4)FXL}{EA}, \qquad \delta_{11} = \sum_{\text{sauvat}} \frac{S_{X_i}^2 L_i}{(EA)_i} = \frac{(4\sqrt{2}+3)X^2L}{EA}$$

$$\delta_{10} + \delta_{11} = 0 \Rightarrow X = \frac{6\sqrt{2}-4}{4\sqrt{2}+3}F = \frac{60-34\sqrt{2}}{23}F \approx 0.52F$$

2. Käytetään kulmanmuutosmenetelmää



$$\begin{cases} M_{12} = a_{12}\varphi_1 + \mathrm{MK}_{12} \\ M_{13} = a_{13}\varphi_1 \\ M_{14} = a_{14}\varphi_1 \end{cases}$$

Tasapainoehto: $M_{12} + M_{13} + M_{14} = 0$

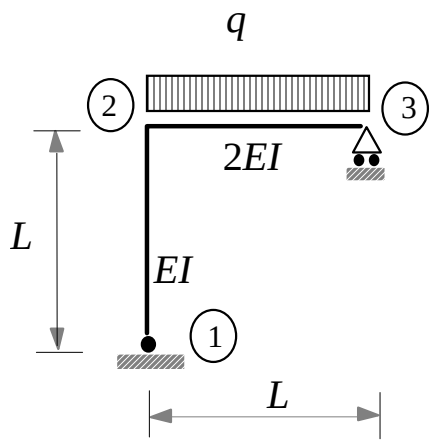
$$\Rightarrow \qquad \varphi_1 = \frac{-\mathrm{MK}_{12}}{a_{12} + a_{13} + a_{14}}$$

$$a_{12} = a_{13} = \frac{4EI}{L},\ a_{14} = \frac{4\sqrt{2}EI}{L},\ \mathrm{MK}_{12} = -\frac{qL^2}{12} \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{qL^3}{48(2+\sqrt{2})EI} = \frac{2-\sqrt{2}}{96}\frac{qL^3}{EI}$$

$$M_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{24}qL^2 \approx -0.059qL^2,\ M_{13} = \frac{2-\sqrt{2}}{24}qL^2 \approx 0.024qL^2,\ M_{14} = \frac{\sqrt{2}-1}{12}qL^2 \approx 0.035qL^2$$

$$M_{21} = \frac{2+\sqrt{2}}{48}qL^2 \approx 0.071qL^2,\ M_{31} = \frac{2-\sqrt{2}}{48}qL^2 \approx 0.012qL^2,\ M_{41} = \frac{\sqrt{2}-1}{24}qL^2 \approx 0.017qL^2$$

3. Käytetään momenttimenetelmää.



$$\varphi_{21} = \frac{L}{3EI}\Psi(kL)M_{21} + \psi \qquad k^2 = \frac{N_{21}}{EI},\ \alpha_{23}^{o} = \frac{qL^3}{48EI}$$

$$\varphi_{23} = \frac{L}{6EI}M_{23} + \alpha_{23}^{o} \qquad \Psi(kL) = \frac{3}{kL}\left(\frac{1}{kL} - \frac{1}{\tan kL}\right)$$

Yhteensopivuusehto $\varphi_{21} = \varphi_{23} = \varphi_2$ ja tasapainoehto

$M_{21} + M_{23} = 0 \ \Rightarrow\ M_{23} = -M_{21} = M_2$

$Q_{21} = 0 \ \Rightarrow\ -M_{21} + N_{21}\psi L = 0,\ N_{21} = -P$

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{6EI}(1+2\Psi(kL)) & -1 \\ -1 & PL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_2 \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{23}^{o} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M_2 \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{\frac{PL^2}{6EI}(1+2\Psi(kL)) - 1} \begin{Bmatrix} PL\alpha_{23}^{o} \\ \alpha_{23}^{o} \end{Bmatrix}$$

Ensimmäinen iteraatio:

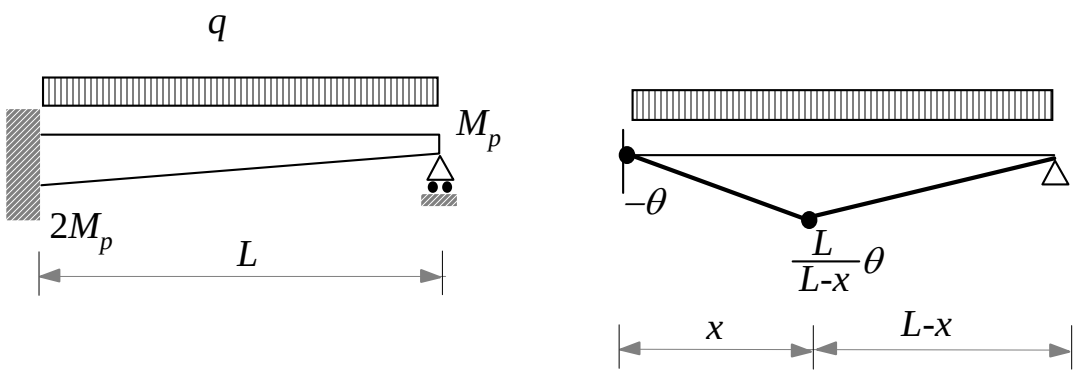
$$N_{21} = -\frac{qL}{2} = 240\mathrm{kN} \Rightarrow kL = 2.028 \Rightarrow \psi(kL) = 1.457 \Rightarrow M_2 = 146.5\mathrm{kNm}$$

$$N_{21} = -\frac{qL}{2} + \frac{M_2}{L} = 215.6\mathrm{kN} \Rightarrow kL = 1.992 \Rightarrow \psi(kL) = 1.384 \Rightarrow M_2 = 167.8\mathrm{kNm}$$

$$N_{21} = -\frac{qL}{2} + \frac{M_2}{L} = 171.6\mathrm{kN} \Rightarrow kL = 1.907 \Rightarrow \psi(kL) = 1.374 \Rightarrow M_2 = 171.6\mathrm{kNm}$$

$$N_{21} = -\frac{qL}{2} + \frac{M_2}{L} = 172.4\mathrm{kN} \Rightarrow kL = 1.904 \Rightarrow \psi(kL) = 1.372 \Rightarrow M_2 = 172.4\mathrm{kNm}$$

4.



$$\delta W_s = 2M_p\theta + M_p(2-\frac{x}{L})\frac{L}{L-x}\theta = \frac{4L-3x}{L-x}M_p\theta$$

$$\delta W_u = \frac{1}{2}qxL\theta$$

$$q = 2\frac{4L-3x}{x(L-x)}\frac{M_p}{L} = 2f(x)\frac{M_p}{L}, \quad \text{missä } f(x) = \frac{4L-3x}{x(L-x)}$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = \frac{-3x(L-x)-(4L-3x)(L-2x)}{x^2(L-x)^2} \; (=0) \; \Rightarrow 3x^2 - 8Lx + 4L^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4L \pm 2L}{3} \;\; \Rightarrow \;\; x = \frac{2}{3}L \;\; \Rightarrow \;\; q_p = q(\frac{2}{3}L) = 18\frac{M_p}{L^2}$$