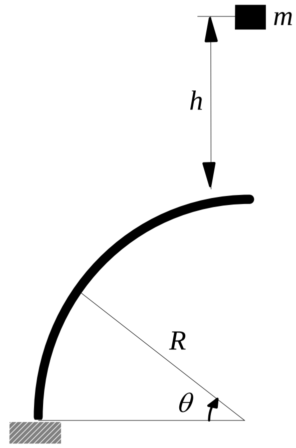
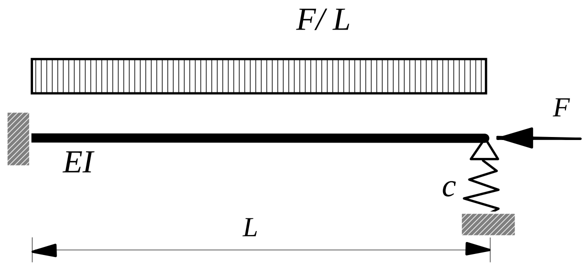
## Rak-54.2100 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA I
**Tentti 10. 1. 2008**

Kirjoita jokaiseen koepaperiin selvästi
- opintojakson nimi, koodi ja tentin päivämäärä
- kaikki nimesi puhuttelunimi alleviivattuna
- koulutusohjelma, opiskelijanumero, myös tarkistuskirjain
- milloin olet pakolliset kotitehtävät suorittanut sekä monettako kertaa olet tentissä

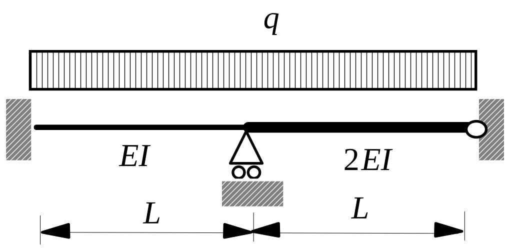



1. Massa $m$ putoaa korkeudelta $h$ ( $h >> R$ ) oheisen ympyränkaaren (neljännes-ympyrä) vapaaseen päähän. Määritä putoamiskohdan pystysuora siirtymä ja suurin kaareen syntyvän taivutusmomentin arvo, kun kaaren taivutusjäykkyys on $EI$. Leikkausvoiman ja normaalivoiman vaikutus voidaan jättää huomiotta samaten kuin kaikki energiahäviöt.

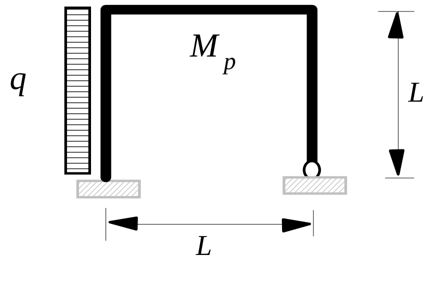
2. Oheinen puristettu-taivutettu sauva, jonka pituus on $L$ ja taivutusjäykkyys $EI$, on tuettu oikeanpuoleisesta päästään kimmoisella jousella, jonka jousivakio on $c$. Määritä suurin taivutusmomentin arvo.




3. Määritä oheisen jatkuvan palkin taivutusmomentti- ja leikkausvoimajakaumat. Kuinka suuri pistemäinen taivutusmomentti ja mihin suuntaan keskituelle olisi lisättävä, jotta kiertymä keskituella olisi nolla?

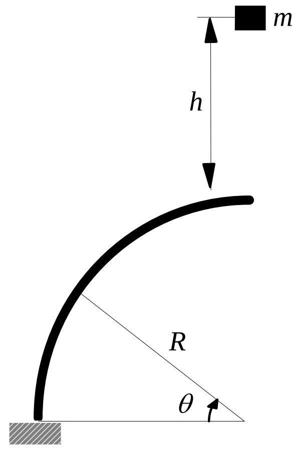



4. Kuinka suuren tuulikuorman $q$ oheinen kehä, jonka täysplastisen momentin arvo on $M_p$, kestää menettämättä kantokykyään? Tarkasta lisäksi, että myötöehto toteutuu koko rakenteessa.



# Rak-54.101 RAKENTEIDEN MEKANIIKKA I
Tentti 10.01.2008

## RATKAISUT



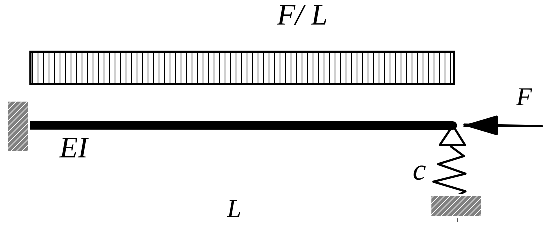

**1.** Taivutusmomentin yhtälö kaaren päässä vaikuttavasta pistekuormasta $P$ on $M(\theta) = -PR\cos\theta$. Tällöin kaaren muodonmuutosenergia on

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{P^2R^2\cos^2\theta}{EI} R\mathrm{d}\theta = \frac{P^2R^3}{2EI}\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi P^2 R^3}{8EI}$$

Tämän tulee olla yhtäsuuri kuin massan potentiaalienergia, eli

$\dfrac{\pi P^2R^3}{8EI} = mgh \;\Rightarrow\; P = \dfrac{2}{R}\sqrt{\dfrac{2mghEI}{\pi R}}$. Siirtymä $\delta$ saadaan yhtälöstä

$\tfrac{1}{2}P\delta = \dfrac{\pi P^2R^3}{8EI} \;\Rightarrow\; \delta = R^2\sqrt{\dfrac{\pi mgh}{2REI}}$ ja suurin taivutusmomentti $M_{\max} = PR = 2\sqrt{\dfrac{2mghEI}{\pi R}}$.




**2.** Puristetun-taivutetun sauvan differentiaaliyhtälö on

$$EIv'''' + Fv'' = F/L \Leftrightarrow v'''' + k^2v'' = F/EIL,\; k^2 = F/EI$$

Ratkaisu on $v(x) = C_1\sin kx + C_2\cos kx + C_3x + C_4 + x^2/2L$

Reunaehdot ovat

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \;\Rightarrow C_4 = -C_2$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow C_1k + C_3 = 0 \;\Rightarrow C_3 = -kC_1$$

$$v''(L) = 0 \Rightarrow -C_1k^2\sin kL - C_2k^2\cos kL + 1/L = 0 \;\Rightarrow C_2 = -C_4 = -C_1\tan kL + \frac{1}{k^2L\cos kL}$$

Tällöin $v(x) = C_1(\sin kx - \tan kL\cos kx - kx + \tan kL) + \dfrac{\cos kx - 1}{k^2L\cos kL} + \dfrac{x^2}{2L}$ ja edelleen

$$M(x) = -EIv''(x) = C_1F(\sin kx - \tan kL\cos kx) + \frac{EI}{L}\left(\frac{\cos kx}{\cos kL} - 1\right)$$

$$Q(x) = -EIv'''(x) = C_1Fk(\cos kx + \tan kL\sin kx) - \frac{F\sin kx}{kL\cos kL}$$

Taivutusmomentti saa suurimman arvonsa joko sauvan päässä $x = 0$ tai pisteessä, jossa $Q(x) = 0$. Sauvan päässä taivutusmomentti on $M(0) = \dfrac{EI}{L}\dfrac{(1 - \cos kL - C_1k^2L\sin kL)}{\cos kL}$.

Leikkausvoima häviää pisteessä, jossa $\tan kx = \dfrac{C_1k^2L\cos kL}{C_1k^2L\sin kL - 1}$, joka sijoitetaan taivutusmomentin lausekkeeseen.

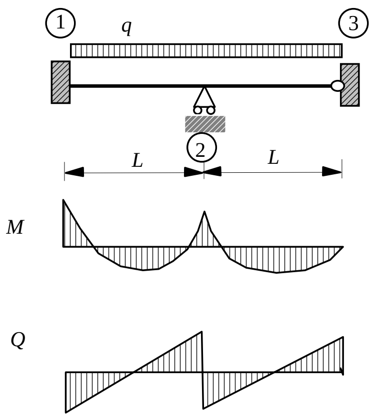
Integroimisvakio $C_1$ voidaan lopuksi määrittää esimerkiksi ehdosta

$$Q(0) = F - cv(L) \Leftrightarrow C_1Fk = F - C_1c(\tan kL - kL) + c\frac{\cos kL - 1}{k^2L\cos kL} + \frac{cL}{2}$$

**3.** Sauvakiertymät $\underbrace{M_{21}}_{-M_2} = \frac{4EI}{L}\underbrace{\varphi_{21}}_{\varphi_2} + \underbrace{MK_{21}}_{\frac{1}{12}qL^2}$, $\underbrace{M_{23}}_{M_2} = \frac{6EI}{L}\underbrace{\varphi_{23}}_{\varphi_2} + \underbrace{MK^{o}_{23}}_{-\frac{1}{8}qL^2}$

Tasapainoehdon mukaan $M_{21} + M_{23} = 0$, josta saadaan $\varphi_2 = \frac{qL^3}{240EI}$

Tällöin $M_{12} = \frac{2EI}{L}\varphi_2 + \underbrace{MK_{12}}_{-\frac{1}{12}qL^2} = -\frac{3}{40}qL^2$, $M_2 = M_{23} = -M_{21} = -\frac{1}{10}qL^2$, $M_{32} = 0$




$Q_{12} = \frac{1}{2}qL - \frac{1}{L}(M_{12} + M_{21}) = \frac{19}{40}qL,$

jolloin $Q_{21} = -\frac{1}{2}qL - \frac{1}{L}(M_{12} + M_{21}) = \frac{21}{40}qL,$

$Q_{23} = \frac{1}{2}qL - \frac{1}{L}M_{23} = \frac{3}{5}qL,\ Q_{32} = -\frac{1}{2}qL - \frac{1}{L}M_{23} = -\frac{2}{5}qL$

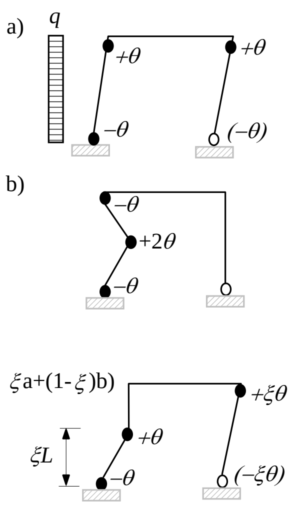
Jotta kiertymä tuella 2 olisi nolla, $MK_{21} + MK^{o}_{23} + \bar{M} = 0$, josta

$\bar{M} = +\frac{1}{24}qL^2$

**4.** Mekanismi a) $\frac{1}{2}q\theta L^2 = 3M_p\theta \Rightarrow q = \frac{6M_p}{L^2}$

Mekanismi b) $\frac{1}{4}q\theta L^2 = 4M_p\theta \Rightarrow q = \frac{16M_p}{L^2}$

Yhdistelmämekanismi a+b) $q\left[\frac{1}{2}\theta(\xi L)^2 + \xi(1-\xi)L^2\right] = (2+\xi)M_p\theta \Rightarrow q = \frac{2(2+\xi)M_p}{(2\xi - \xi^2)L^2}$




Tästä saadaan, että $\frac{qL^2}{M_p} = \frac{2(2+\xi)}{(2\xi - \xi^2)} = f(\xi)$

ja edelleen $f'(\xi) = 2\frac{2\xi - \xi^2 - (2+\xi)(2-2\xi)}{(2\xi - \xi^2)^2}$, mikä häviää,

kun $\xi^2 + 4\xi - 4 = 0$ eli $\xi = -2 \pm \sqrt{8}$. Tästä saadaan lopputulos $\xi = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.828$. Vastaava funktion arvo $f(\xi) = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5.828$. Näin rakenteen rajakuorma on

$q_p = (3 + 2\sqrt{2})\frac{M_p}{L^2} \approx 5.828\frac{M_p}{L^2}$

Nurkan 2 momentti $M_x$ arvo voidaan todeta käyttämällä mekanismia a, jolloin saadaan

$\frac{1}{2}q_p\theta L^2 = 2M_p\theta + M_x\theta \Rightarrow M_x = .914M_p < M_p$