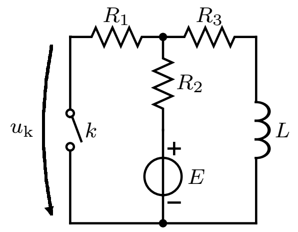
Laske tehtävät 1–2 eri paperille kuin tehtävät 3–5. Muista kirjoittaa jokaiseen paperiin **selvästi** nimi, opiskelijanumero, kurssin nimi ja koodi. **Epäselvät vastauspaperit voidaan jättää arvostelematta.**
Tehtävät lasketaan korkeakoulun koepaperille. Muita papereita ei tarkasteta.

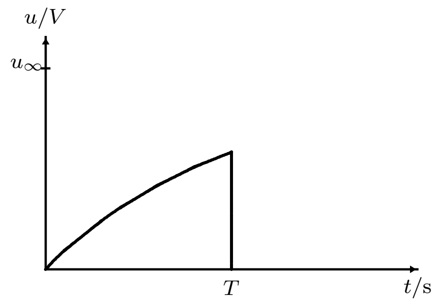
1.



Kytkin k avataan hetkellä $t = 0$ kuvan mukaisessa tasajännitelähteen syöttämässä piirissä, joka on tätä ennen jatkuvuustilassa. Laske kytkimen jännite $u_k(t)$ kytkimen avaamisen jälkeen.

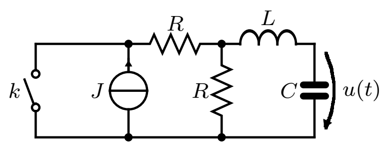
$$E = 20\,\text{V} \quad L = 10\,\text{mH} \quad R_1 = 2\ \Omega$$
$$R_2 = 12\ \Omega \quad R_3 = 4\ \Omega.$$

2.



Johda kuvan pulssin Laplace-muunnos.
$u(t) = u_\infty(1 - e^{-t/T})$, kun $0 \le t \le T$.

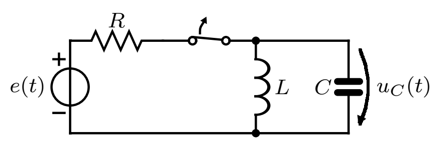
3.



Oheinen tasavirtalähteen syöttämä piiri on jatkuvuustilassa ennen hetkeä $t = 0$, jolloin kytkin k suljetaan. Laske jännite $u(t)$.

$$J = 1\,\text{A} \quad L = 100\,\text{mH} \quad C = 400\,\text{mF}$$
$$R = 1{,}2\ \Omega.$$

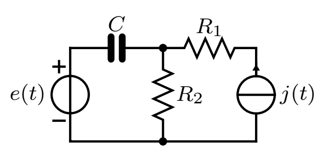
4.



Oheinen vaihtojännitelähteen syöttämä piiri on jatkuvuustilassa ennen hetkeä $t = 0$, jolloin kytkin avataan. Laske kondensaattorin yli oleva jännite $u_C(t)$ kytkimen avaamisen jälkeen.
$e(t) = \hat{e}\,\sin(\omega t + \varphi)$

$$\hat{e} = 4\,\text{V} \quad \omega = 1\ \text{rad/s} \quad \varphi = 45°$$
$$R = 2\ \Omega \quad L = 2\,\text{H} \quad C = 1\,\text{F}.$$

5.



Laske resistanssin R_2 pätöteho, kun $e(t) = \sin(\omega_1 t)$ V ja $j(t) = 1 + 2\sin(\omega_2 t)$ A.

$$\omega_1 = 2\ \text{rad/s} \quad \omega_2 = 3\ \text{rad/s} \quad R_1 = 2\ \Omega$$
$$R_2 = 2\ \Omega \quad C = 1\,\text{F}.$$

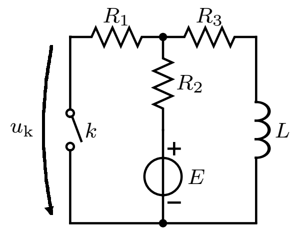
Laplace-muunnostaulukko

Määritelmä		
1.	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$

Laplace-muunnoksen ominaisuuksia		
	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
2.	$A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$	$A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)$
3.	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)$	$sF(s) - f(0)$
4.	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(t)$	$s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$
5.	$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
6.	$(-t)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} F(s)$
7.	$f(t-a)\varepsilon(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
8.	$f(t+a)$	$e^{as}(F(s) - \int_0^a e^{-st} f(t)\mathrm{d}t)$
9.	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
10.	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
11.	jaksollinen funktio $f(t) = f(t+T)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$, $F_1(s) =$ yhden jakson muunnos
12.	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F_1(s) F_2(s)$
13.	$f(0^+) \ = \ \lim_{s\to\infty} sF(s)$	
14.	$f(\infty) \ = \ \lim_{s\to 0} sF(s)$, jos loppuarvo on olemassa	

Muunnospareja		
	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
15.	$\delta(t)$	1
16.	$a\varepsilon(t)$	$\frac{a}{s}$
17.	t	$\frac{1}{s^2}$
18.	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
19.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
20.	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
21.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
22.	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
23.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
24.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
25.	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
26.	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
27.	$\frac{e^{-at}t^n}{n!}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
28.	$\frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
29.	$[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\pi/\omega)]\sin(\omega t)$	$\left(1 + e^{-\pi s/\omega}\right)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

0.1



Kytkin k avataan hetkellä $t = 0$ kuvan mukaisessa tasajännitelähteen syöttämässä piirissä, joka on tätä ennen jatkuvuustilassa. Laske kytkimen jännite $u_\mathrm{k}(t)$ kytkimen avaamisen jälkeen.

$$E = 20\,\mathrm{V} \quad L = 10\,\mathrm{mH} \quad R_1 = 2\ \Omega$$
$$R_2 = 12\ \Omega \quad R_3 = 4\ \Omega.$$

Alkuarvot ($t = 0^-$):

$$I_{L0} = \frac{E}{R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R1 + R_3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_3 R_3 + R_3 R_1} \cdot E = \frac{2}{80} \cdot 2\,\mathrm{A} = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}$$

Reunaehdot:

$$u(0^+) = E - R_2 I_{L0} = (20 - 12 \cdot \frac{1}{2})V = 14\,\mathrm{V}$$
$$u(\infty) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot E = \frac{4}{16} \cdot 20\,\mathrm{V} = 5\,\mathrm{V}$$

Virran reunaehdot:

$$i(0^+) = I_{L0}$$
$$i(\infty) = \frac{E}{R_2 + R_3}$$

Piirin jänniteyhtälö:

$$E = (R_2 + R_3)i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Ratkaisu on muotoa

$$i = A + Be^{st}$$

Ratkaistaan A ja B reunaehdoista, koska $i(\infty) \neq \infty$, tulee olla $s < 0$.

$$i(0^+) = I_{L0} = A + B$$
$$u(\infty) = \frac{E}{R_2 + R_3} = A$$

josta saadaan

$$A = \frac{E}{R_2 + R_3}$$
$$B = I_{L0} - \frac{E}{R_2 + R_3}$$

Ratkaistaan s differentiaaliyhtälöstä:

$$E = (R_2 + R_3)(A + Be^{st}) + LsBe^{st} = (R_2 + R_3)A + (R_2 + R_3 + Ls)Be^{st}$$
$$(R_2 + R_3 + Ls)Be^{st} = E - (R_2 + R_3)A = E - (R_2 + R_3)\frac{E}{R_2 + R_3} = 0$$
$$(R_2 + R_3 + Ls) = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_2 + R_3}{L}.$$

Siis

$$i = \frac{E}{R_2 + R_3} + \left(I_{L0} - \frac{E}{R_2 + R_3}\right) e^{-\frac{R_2 + R_3}{L} t}$$

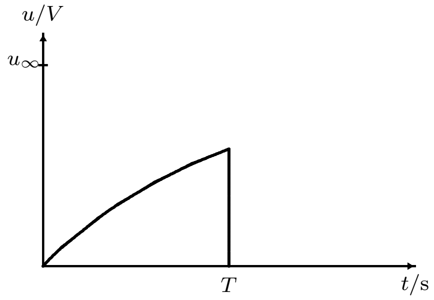
edelleen

$$u = E - Ri = E - R2 \left[\frac{E}{R_2 + R_3} + \left(I_{L0} - \frac{E}{R_2 + R_3}\right) e^{-\frac{R_2 + R_3}{L} t}\right]$$

Tulos

$$u = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E + \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} E - R_2 I_{L0}\right) e^{-\frac{R_2 + R_3}{L} t} = (5 + 9e^{-1600t})\,\mathrm{V}$$

0.2

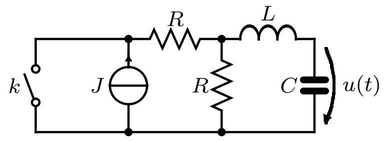


Johda kuvan pulssin Laplace-muunnos.
$u(t) = u_\infty(1 - e^{-t/T})$, kun $0 \leq t \leq T$.

$$
\begin{aligned}
u(t) &= u_\infty(1 - e^{-t/T}\left[\epsilon(t) - \epsilon(t-T)\right] \\
&= u_\infty\left[\epsilon(t) - \epsilon(t-T) - e^{-t/T}\epsilon(t) + e^{-\frac{t-T+T}{T}}\epsilon(t-T)\right] \\
&= u_\infty\left[\epsilon(t) - \epsilon(t-T) - e^{-t/T}\epsilon(t) + e^{-1}e^{-\frac{t-T}{T}}\epsilon(t-T)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U(s) &= u_\infty\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-Ts} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}} + \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{T}}e^{-Ts}\right] \\
&= u_\infty\left[\frac{1}{s}\left(1 - e^{-Ts}\right) - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\left(1 - \frac{1}{e}\cdot e^{-Ts}\right)\right] \\
&= u_\infty\left[\frac{1}{s}\left(1 - e^{-Ts}\right) - \frac{T}{Ts+1}\left(1 - e^{-(Ts+1)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

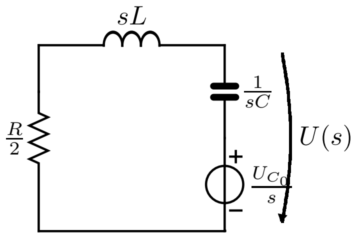
0.3



Oheinen tasavirtalähteen syöttämä piiri on jatkuvuustilassa ennen hetkeä $t = 0$, jolloin kytkin k suljetaan. Laske jännite $u(t)$.

$$J = 1\,\mathrm{A} \qquad L = 100\,\mathrm{mH} \quad C = 400\,\mathrm{mF}$$
$$R = 1{,}2\ \Omega.$$

$$I_{L_0} = 0, \qquad U_{C_0} = R \cdot J = 1{,}2\,\mathrm{V}$$

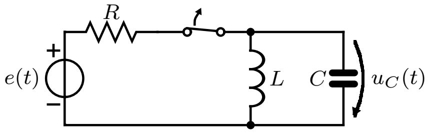


$$U(s) = \frac{\frac{R}{2} + sL}{\frac{R}{2} + sL + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{U_{C_0}}{s}$$

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{s + \frac{R}{2L}}{s^2 + \frac{R}{2L}s + \frac{1}{LC}} \cdot U_{C_0} = \frac{s+6}{s^2+6s+25} \cdot 1{,}2 = \frac{s+6}{(s+3)^2+16} \cdot 1{,}2 \\ &= 1{,}2 \cdot \left[\frac{s+3}{(s+3)^2+16} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{(s+3)^2+16} \right] \end{aligned}$$

$$u(t) = 1{,}2e^{-3t} \cdot \left[\cos(4t) + \frac{3}{4}\sin(4t) \right] \ \mathrm{V, \ kun}\ t \geq 0$$

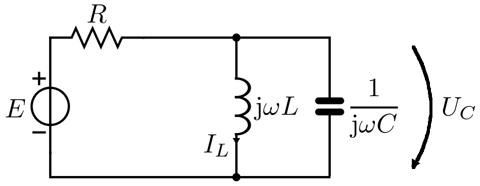
0.4



Oheinen vaihtojännitelähteen syöttämä piiri on jatkuvuustilassa ennen hetkeä $t = 0$, jolloin kytkin avataan. Laske kondensaattorin yli oleva jännite $u_C(t)$ kytkimen avaamisen jälkeen.
$e(t) = \hat{e}\,\sin(\omega t + \varphi)$

$$\hat{e} = 4\,\mathrm{V} \quad \omega = 1\ \mathrm{rad/s} \quad \varphi = 45^\circ$$
$$R = 2\ \Omega \quad L = 2\,\mathrm{H} \qquad C = 1\,\mathrm{F}.$$

Lasketaan kondensaattorin jännite ja kelan virta jatkuvassa tilassa osoittimien avulla.



$$E = \frac{\hat{e}}{\sqrt{2}}\underline{/\varphi} = 2\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ}\ \mathrm{V}$$

Kondensaattorin jännite saadaan jännitteen jaolla:

$$U_C = \frac{\dfrac{\mathrm{j}\omega L}{1-\omega^2 LC}}{R + \dfrac{\mathrm{j}\omega L}{1-\omega^2 LC}} E = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R - \omega^2 LCR + \mathrm{j}\omega L} E = \frac{\mathrm{j}2}{2-4+\mathrm{j}2} 2\sqrt{2}\,\underline{/45^\circ}\ \mathrm{V} = 2\,\underline{/0^\circ}\ \mathrm{V}$$

Kelan virta saadaan kondensaattorin jännitteen avulla, koska molempien komponenttien yli on sama jännite:

$$I_L = \frac{U_C}{\mathrm{j}\omega L} = 1\,\underline{/-90^\circ}\ \mathrm{A}$$

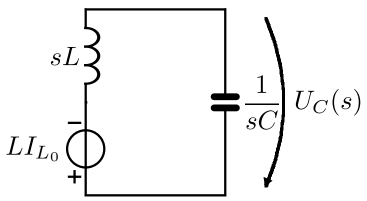
Siirrytään takaisin aika-alueeseen, jolloin saadaan:

$$u_C(t) = 2\sqrt{2}\,\sin(t)\ \mathrm{V} \qquad i_L(t) = \sqrt{2}\,\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{A}$$

Alkuarvoiksi hetkellä $t = 0$ saadaan:

$$U_{C_0} = u_C(t=0) = 0\,\mathrm{V} \qquad I_{L_0} = i_L(t=0) = -\sqrt{2}\,\mathrm{A}$$

Piiri Laplace-muunnoksen jälkeen:

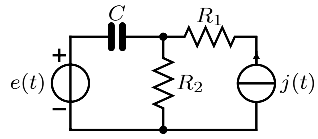


$$U_C(s) = -\frac{\dfrac{1}{sC}}{\dfrac{1}{sC} + sL} LI_{L_0} = \frac{-1}{s^2 LC + 1}\,L\,I_{L_0} = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + \dfrac{1}{2}}$$

Siirrytään takaisin aika-alueeseen, jolloin saadaan:

$$u_C(t) = 2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\ \mathrm{V},\ \text{kun } t \geq 0$$

0.5



Laske resistanssin R_2 pätöteho, kun $e(t) = \sin(\omega_1 t)$ V ja $j(t) = 1 + 2\sin(\omega_2 t)$ A.

$\omega_1 = 2$ rad/s $\quad \omega_2 = 3$ rad/s $\quad R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega \quad C = 1\,\mathrm{F}$.

Resistanssin R_2 virta DC:llä:

$$I_0 = 1\,\mathrm{A}.$$

Kulmataajuudella ω_1, kun $E_1 = 1/\sqrt{2}\,\mathrm{V}$

$$I_1 = \frac{E_1}{R_2 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_1 C}} = 0{,}343\underline{/0.245}\,\mathrm{A}$$

Kulmataajuudella ω_2, kun $J_2 = 2/\sqrt{2}\,\mathrm{A}$

$$I_2 = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega_2 C}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega_2 C} + R_2} J_2 = 0{,}2325\underline{/-1{,}4056}\,\mathrm{A}$$

Kokonaisteho $= \mathrm{R}_2 * (|I_0|^2 + |I_1|^2 + |I_2|^2) = 2{,}3434\,\mathrm{W}$