Aalto-yliopisto Hyvönen/Kinnunen
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

2. välikoe 15.3.2013 klo 10:00-12:00.

1. Alla on kuusi kurssilla esiintynyttä funktiota. Lausekkeissa olevien funktioiden oletetaan olevan riittävän sileitä ja riittävän hyvin integroituvia. Minkä ongelman ratkaisuja ne ovat? Anna myös mahdolliset alku- ja reuna-arvot sekä lähdetermit. Pelkkä ongelman täsmällinen muotoilu riittää.

   (a) $u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\,dy$, $x \in \mathbb{R}^3$.

   (b) $u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

   (c) $u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\,dy\,ds$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

   (d) $u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\,dy\,ds$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

   (e) $u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x,t)} \big(h(y)t + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\big)\,dS(y)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

   (f) $u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)} \frac{f(y, t-|y-x])}{|y-x|}\,dy$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$.

2. Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko, $T > 0$ ja $u, v \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ ovat lämpöyhtälön ratkaisuja joukossa $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$.

   (a) Muotoile vertailuperiaate lämpöyhtälön ratkaisuille u ja v joukossa Ω_T. Pelkkä täsmällinen muotoilu riittää, vertailuperiaatetta ei tarvitse todistaa.

   (b) Todista seuraava stabiilisuustulos vertailuperiaatteen avulla: Jos $\varepsilon > 0$ ja $|u - v| \le \varepsilon$ parabolisella reunalla $\Gamma_T = (\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$, niin $|u - v| \le \varepsilon$ joukossa Ω_T.

3. Oletetaan, että $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $n \ge 2$, ja määritellään
$$U(x,r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y),$$
missä $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ ja $\alpha(n)$ on yksikköpallon tilavuus avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

   (a) Näytä, että $\lim_{r\to 0} U(x,r) = u(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

   (b) Näytä, että
$$\frac{\partial U}{\partial r}(x,r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\,dy$$
   kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.
   Vihje: Greenin kaava on $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dy = -\int_\Omega v\Delta u\,dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\,dS$.

   (c) Näytä, että $U(x,r) = u(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$, jos u on harmoninen avaruudessa $\mathbb{R}^n$.