Aalto-yliopisto Hyvönen/Kinnunen
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4

3. välikoe 19.4.2013 klo 10:00-12:00.

1. 2π-jaksollisen funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ diskreetti Fourier-muunnos $d = [d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$ määritellään vaatimalla, että

$$f(t_k) = \sum_{j=0}^{N-1} d_j e^{ijt_k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

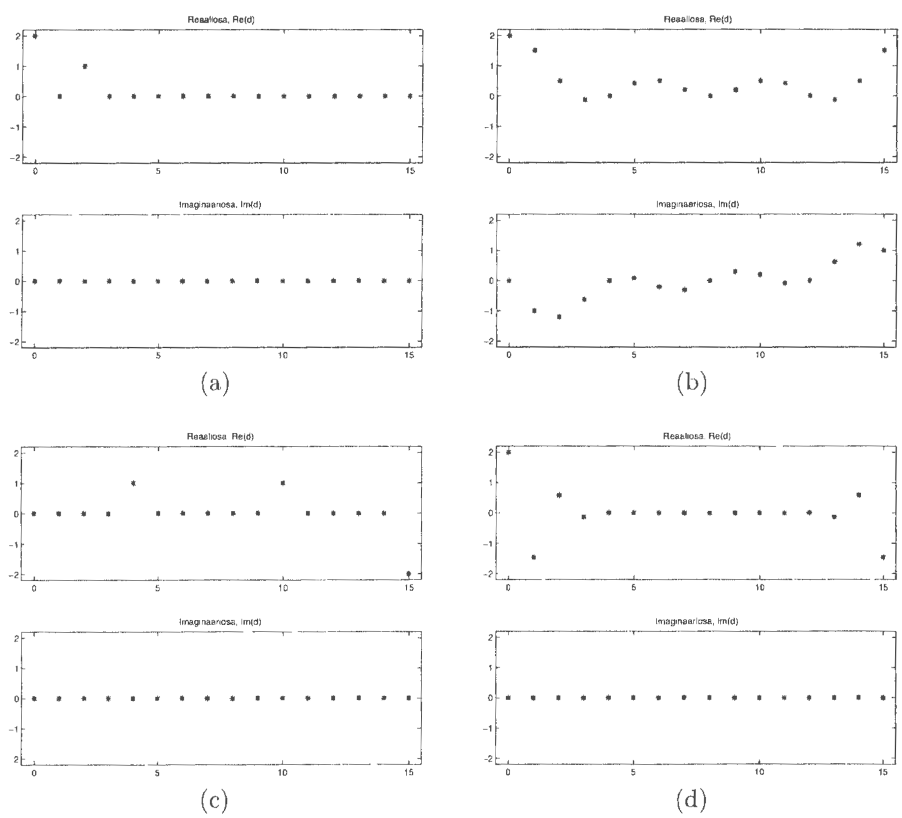
missä $t_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, ja $N \in \mathbb{N}$.

Olkoon $N = 16$. Kuvan 1 alikuvissa on esitetty neljän (2π-jaksollisen) funktion diskreetit Fourier-muunnokset:

$$f_1(t) = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{8}{\pi^2}(t-\pi)^2}, \quad 0 \le t < 2\pi, \qquad f_2(t) = \begin{cases} 8, & 0 \le t < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \le t < 2\pi, \end{cases}$$

$$f_3(t) = 4\cos^2(t) - e^{-2it}, \qquad f_4(t) = (e^{2it} - e^{-3it})^2.$$

Päättele, mikä diskreetti Fourier-muunnoos liittyy mihinkin funktioon? Perustele vastauksesi lyhyesti. (Vihje: Huomaa, että f_1 on reaaliarvoinen ja parillinen.)



Kuva 1: Neljän funktion diskreetit Fourier-muunnokset arvolla $N = 16$. Jokaisessa alikuvassa (a)–(d) ylempi kuvaaja on $\mathrm{Re}(d)$ ja alempi $\mathrm{Im}(d)$ (vektorin d indeksin funktiona).

2. Määritellään alkuarvo-ongelmalle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

numeerinen ratkaisumenetelmä

$$x_{j+1} = x_j + h\big(11f(t_j, x_j) - 10f(t_{j+1}, x_j + hf(t_j, x_j))\big), \qquad j = 0, 1, \dots,$$

missä $t_j = jh$ ja $h > 0$. (Voit olettaa, että $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)

(a) Osoita, että kyseessä on (vähintään) ensimmäisen kertaluvun menetelmä. Toisin sanoen todista, että (1):n tarkka ratkaisu $x(t)$ toteuttaa

$$x(\tau + h) = x(\tau) + h\Big(11f\big(\tau, x(\tau)\big) - 10f\big(\tau + h, x(\tau) + hf(\tau, x(\tau))\big)\Big) + O(h^2)$$

olettaen, että f on riittävän sileä pisteen $\tau \geq 0$ ympäristössä. Miksi menetelmän sanotaan olevan *ensimmäistä* kertalukua, vaikka virhetermin $O(h^2)$ eksponentti on *kaksi*?

(b) Sovella menetelmää tilanteeseen $f(t, x) = \lambda x$, missä $\mathbb{R} \ni \lambda < 0$. Millä askelpituuden $h > 0$ arvoilla pätee, että

$$\lim_{j \to \infty} x_j = 0\ ?$$

(c) Soveltuuko tämä menetelmä kankeiden tehtävien ratkaisemiseen paremmin vai huonommin kuin (eksplisiittinen) Eulerin menetelmä? Perustele vastauksesi.

3. Diskretoi tehtävä

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ -u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

käyttäen differenssimenetelmää pisteistön $x_j = jh = j/(m+1)$, $j = 1, 2, \dots, m$, suhteen. Toisin sanoen muodosta approksimatiivinen matriisiyhtälö

$$Au^h = b^h,$$

missä $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $b^h \in \mathbb{R}^m$ ja $\mathbb{R}^m \ni u^h \approx [u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_m)]^{\mathrm{T}}$. Todista lisäksi, että kerroinmatriisi A on kääntyvä.

Voit käyttää hyväksi seuraavia tietoja:

(i)

$$u''(x_j) = \frac{1}{h^2}\big(u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})\big) + O(h^2), \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

(ii)

$$u'(0) = \frac{1}{2h}\big(-3u(0) + 4u(h) - u(2h)\big) + O(h^2),$$

$$u'(1) = \frac{1}{2h}\big(u(1-2h)) - 4u(1-h) + 3u(1)\big) + O(h^2).$$

(iii) Matriisi

$$\Delta^h_{N-N} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

on negatiivisesti semidefiniitti, eli $a^{\mathrm{T}}\Delta^h_{N-N}a \leq 0$ kaikilla $a \in \mathbb{R}^m$.