Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopisto, perustieteiden korkeakoulu

Pitkäranta/Laaksonen

Mat-1.1020 Peruskurssi L2

Välikoe 1 18.02.2013

Täytä selvästi *jokaiseen vastauspaperiin* kaikki otsaketiedot. Merkitse kurssikoodi-kohtaan opintojakson numero, nimi ja onko kyseessä tentti vai välikoe. Tutkinto-ohjelmakoodit ovat ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta. Koeaika on 3h.

1. Tarkastellaan integraalia $\int_0^a (\ln x)^{-n}\,dx$, missä $a > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$.
   a) Näytä muuttujan vaihdolla $\ln x = -t$, että integraali suppenee jokaisella n kun $a < 1$ ja hajaantuu jokaisella n kun $a \geq 1$.
   b) Määritä alkeisfunktio f kaavassa $\int_0^a (\ln x)^{-2}\,dx = f(a) + \int_0^a (\ln x)^{-1}\,dx$, $0 < a < 1$.

2. Laske $y(3)$, kun $y(0^+) = 0$ ja välillä $x \in (0, \infty)$ on voimassa
   a) $y' = \dfrac{8\sqrt{x}}{x+1}$, b) $y' = \dfrac{8\sqrt{y}}{y+1}$.

3. Käyrän $S:\ y = y(x)$ (merkkinen) *kaarevuus* pisteessä $(x, y(x))$ on
$$k(x) = \frac{y''(x)}{(1 + [y'(x)]^2)^{3/2}}.$$
   Halutaan määrittää $y(x)$ ehdoista: $y(0) = y'(0) = 0$ ja $k(x) = \cos\alpha(x)$, $x \in (-a, a)$, missä $\alpha(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ on käyrän S tangentin suuntakulma (tangentin ja x-akselin välinen kulma) pisteessä $(x, y(x))$. Määritä $y(x)$ välillä $(-a, a)$ ja samalla suurin a:n arvo, jolla tehtävä ratkeaa.

4. Ratkaise alkuarvotehtävät
   a) $\begin{cases} (x+1)y' - 2y = x^2(x+1), & x > -1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = x + e^{-2x}, & x > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Institutionen för matematik och systemanalys
Aalto-universitetet, högskolan för teknikvetenskaper

Pitkäranta/Laaksonen

Mat-1.1020 Grundkurs L2

Mellanförhör 1 18.02.2013

Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Räknare är inte tillåten. Examenstid 3h.

1. Vi studerar integralen $\int_0^a (\ln x)^{-n}\, dx$, där $a > 0$ och $n \in \mathbb{N}$.
   a) Visa genom variabelbytet $\ln x = -t$ att integralen konvergerar för varje n då $a < 1$ och divergerar för varje n då $a \geq 1$.
   b) Bestäm en elementär funktion f så att det gäller $\int_0^a (\ln x)^{-2}\, dx = f(a) + \int_0^a (\ln x)^{-1}\, dx$, $0 < a < 1$.

2. Beräkna $y(3)$, då man vet att $y(0^+) = 0$ och att i intervallet $x \in (0, \infty)$ gäller
   a) $y' = \dfrac{8\sqrt{x}}{x+1}$, b) $y' = \dfrac{8\sqrt{y}}{y+1}$.

3. *Krökningen* (med tecken) hos kurvan $S:\ y = y(x)$ i punkten $(x, y(x))$ är
$$k(x) = \frac{y''(x)}{(1 + [y'(x)]^2)^{3/2}}.$$
   Vi vill bestämma funktionen $y(x)$ från villkoren: $y(0) = y'(0) = 0$ och $k(x) = \cos\alpha(x)$, $x \in (-a, a)$, där $\alpha(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ är vinkeln mellan x-axeln och tangenten hos kurvan S i punkten $(x, y(x))$. Bestäm $y(x)$ i intervallet $(-a, a)$ samt det största värdet av a, för vilket problemet är lösbart.

4. Lös begynnelsevärdesproblemen

   a) $\begin{cases} (x+1)y' - 2y = x^2(x+1), & x > -1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = x + e^{-2x}, & x > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$