

Kvanttimekaniikan jatkokurssi TFY-0.3211

Tentti

Tammikuun 10. 2018

Tentaattori: Jami Kinnunen, N208

## Tentti

### 1. (6p) Käsitteistöä

- Pyörimismääräoperaattorit  $L^2$  ja  $L_z$  kommutoivat keskenään joten niille voidaan muodostaa yhteinen ominaistilakanta. Kyseessä on kuitenkin kannan valinta eikä se ole välttämätöntä. Anna siis esimerkki tilasta  $|\psi\rangle$  joka on operaattorin  $L^2$  ominaistila mutta *ei ole* operaattorin  $L_z$  ominaistila. Anna vielä esimerkki tilasta joka on operaattorin  $L_z$  ominaistila mutta *ei ole* operaattorin  $L^2$  ominaistila.
- Miksi Schrödingerin aaltofunktioformalismi ei kelpaa relativistiseksi aaltoyhtälöksi? Kuinka ongelma ratkaistaan Klein-Gordon ja Diracin yhtälöillä?
- Tarkastellaan kahta kaksitilasysteemin *tiheysmatriisia* jossakin tilakan-  
nassa  $|0\rangle, |1\rangle$

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \rho_B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Mitä tiheysmatriisit  $\rho_A$  ja  $\rho_B$  kertovat todennäköisyyksistä löytää systeemi tiloilta  $|0\rangle$  ja  $|1\rangle$ ? Voidaanko tiheysmatriiseja erottaa toisistaan?

### 2. Häiriöteoria

Tarkastellaan  $m$ -massaista hiukkasta yksiulotteisessa harmonisessa potentiaalissa  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ . Lisätään potentiaalin keskelle deltafunktio-potentiaalihäiriö  $\hat{H}'$

$$V'(x) = \langle x | \hat{H}' | x \rangle = \alpha \delta(x),$$

missä  $\alpha$  on jokin vakio. Häiriöttömät ominaistilat ovat

$$\phi_n^{(0)}(x) = \langle x | n^{(0)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \quad (2)$$

ja vastaavat energiat  $E_n^{(0)} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$ . Viisi ensimmäistä Hermiten polynomia ovat  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$ ,  $H_2(x) = 4x^2 - 2$ ,  $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ ,  $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ .

- Muodosta yhtälö alkuperäisen potentiaalin ominaistilojen ensimmäisen kertaluvun energiakorjauksille  $E_n^{(1)} = \langle n^{(0)} | H' | n^{(0)} \rangle$ . Selitä miksi energiat eivät muutu osalle tiloista.

- b) Laske ensimmäisen kertaluvun tilakorjauksen

$$\phi_n^{(1)}(x) = \langle x | n^{(1)} \rangle = \langle x | \sum_{m \neq n} \frac{\langle m^{(0)} | H' | n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} | m^{(0)} \rangle$$

neljä ensimmäistä termiä ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) perustilalle  $n = 0$  paikkaesityksessä. Miksi osa termeistä on nollia?

3. (6p) **Identtiset hiukkaset**

Tarkastellaan kahta (ei välttämättä identtistä) hiukkasta, joista kumpikin voi olla kahdessa paikka-avaruuden tilassa  $|A\rangle$  ja  $|B\rangle$  ( $\phi_A(x) = \langle x | A \rangle$ ,  $\phi_B(x) = \langle x | B \rangle$ ).

- a) Identtiset hiukkaset ovat aina joko fermioneja tai bosoneita. Mitä ehtoja tästä seuraa systeemin fysikaalisesti sallituille tiloille?

Määritellään operaattori joka mittaa hiukkasten välisen etäisyyden neliön  $\hat{d}^2 = (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2$ , jossa operaattori  $\hat{x}_i$  antaa hiukkasen  $i$  paikan. Oletetaan ensin, että hiukkaset ovat ei-identtiset ja että ne ovat tulotilalla  $|A\rangle|B\rangle = |AB\rangle$ . Hiukkasten välisen etäisyyden odotusarvo on nyt

$$\begin{aligned} \langle \hat{d}^2 \rangle_0 &= \langle AB | (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 | AB \rangle \\ &= \int dx_1 \int dx_2 \phi_A(x_1)^* \phi_B(x_2)^* (x_1 - x_2)^2 \phi_A(x_1) \phi_B(x_2). \end{aligned}$$

- b) Kuinka etäisyyden neliön odotusarvo muuttuu jos hiukkaset ovatkin identtisiä fermioneja tai bosoneja?
- c) Kuinka tämä hiukkasten identtisyysvaikutus etäisyyden odotusarvoon näkyy käytännön systeemeissä esimerkiksi Heliumin energiaspektreissä ja molekyyliäidoksissa?

4. (6p) **Sirontateoria**

Kirjoita essee selvittäen mistä on kyse kvanttimekaanisessa sirontateoriassa. Tarkastele aihetta suhteessa klassiseen hiukkasten sirontaan ja toisaalta klassisten aaltojen sirontaan. Kerro lisäksi miten seuraavat käsitteet liittyvät toisiinsa sekä mitattaviin suureisiin

- (Differentiaalinen) sirontavaikutusala
- Vaihesiirto
- Ramsauer-Townsend ja/tai Fano-Feshbach efektit
- Sidotut tilat

Voit vapaasti käyttää kuvia ja yhtälöitä asioiden esitykseen.