Kvanttimekaniikan jatkokurssi TFY-0.3211
Toinen välikoe
Joulukuun 21., 2012
Tentaattori: Jami Kinnunen, N208

Välikoe

1. (6p) **Käsitteistöä**
   Selitä *lyhyesti*
   a) Degeneroitunut häiriöteoria, milloin sitä tarvitaan ja mikä on teorian perusajatus?
   b) Miksi Schrödingerin aaltofunktioformalismi ei kelpaa relativistiseksi aaltoyhtälöksi? Kuinka ongelma ratkaistaan Klein-Gordon ja Diracin yhtälöillä?
   c) Tarkastellaan kahta kaksitilasysteemin tiheysmatriisia
   $$\rho_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \rho_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$
   Mitä tiheysmatriisit ρ_{A} ja ρ_{B} kertovat mitattavista suureista? Voidaanko tiheysmatriiseja erottaa toisistaan?

2. **Häiriöteoria**
   Tarkastellaan m-massaista hiukkasta yksiulotteisessa harmonisessa potentiaalissa $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Lisätään potentiaalin keskelle deltafunktio-potentiaalihäiriö $\hat{H}'$
   $$V'(x) = \langle x|\hat{H}'|x\rangle = \alpha\delta(x),$$
   missä α on jokin vakio. Häiriöttömät ominaistilat ovat
   $$\phi_n^{(0)}(x) = \langle x|n^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \tag{2}$$
   ja vastaavat energiat $E_n^{(0)} = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Viisi ensimmäistä Hermiten polynomia ovat $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$.
   a) Muodosta yhtälö alkuperäisen potentiaalin ominaistilojen ensimmäisen kertaluvun energiakorjauksille $E_n^{(1)} = \langle n^{(0)}|H'|n^{(0)}\rangle$. Selitä miksi energiat eivät muutu osalle tiloista.
   b) Laske ensimmäisen kertaluvun tilakorjauksen
   $$\phi_n^{(1)}(x) = \langle x|n^{(1)}\rangle = \langle x|\sum_{m\neq n}\frac{\langle m^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|m^{(0)}\rangle$$
   neljä ensimmäistä termiä ($m = 1, 2, 3, 4$) perustilalle $n = 0$ paikkaesityksessä. Miksi osa termeistä on nollia?
   Huom. kirjoita eksplisiittisesti muunnos ket-vektoreista paikkaesitykseen.

K Ä Ä N N Ä

3. **Identtiset hiukkaset**
Tarkastellaan kahta identtistä hiukkasta, joista kumpikin voi olla kahdessa paikka-avaruuden tilassa $|A\rangle$ ja $|B\rangle$ (tilat voisivat olla esimerkiksi yksiulotteisen harmonisen potentiaalin kaksi alinta tilaa). Käytä vastauksissasi kantafunktioita $|n_1; n_2\rangle|\sigma_1; \sigma_2\rangle = |n_1\rangle|n_2\rangle|\sigma_1\rangle|\sigma_2\rangle$, missä alaindeksit 1 ja 2 viittaavat hiukkasiin numero 1 ja 2, $n_i = A, B$ ja σ_i on hiukkasen spinin z-komponentti.
   a) Identtiset hiukkaset ovat aina joko fermioneja tai bosoneita, joilla on myös sisäinen vapausaste spin. Mitä ehtoja tästä seuraa systeemin fysikaalisesti sallituille tiloille?
   b) Oletetaan, että hiukkaset ovat identtisiä spin-0 bosoneita ($\sigma_i = 0$). Muodosta systeemin kaikki fysikaalisesti sallitut tilat.
   c) Oletetaan, että hiukkaset ovat identtisiä spin-1/2 fermioneja ($\sigma_i = \uparrow, \downarrow$). Muodosta taas systeemin kaikki fysikaalisesti sallitut tilat.

4. (6p) **Kaksitilasysteemi**
Tarkastellaan yksittäistä ^{6}Li atomia joka on kytketty sähkömagneettiseen kenttään (laser). Oletetaan, että atomi on aluksi perustilallaan $|g\rangle$ ja että kenttä on resonanssissa jonkin tietyn atomin viritystilan $|e\rangle$ kanssa. Kirjoita muutamin yhtälöin ja kuvaajin höystetty essee:
   a) Selitä tarvittavat approksimaatiot jotta pystyt kuvaamaan järjestelmää kaksitilasysteeminä.
   b) Perustele systeemiä kuvaava Hamiltonin operaattori, jonka matriisiesitys on
$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & \Omega \\ \Omega^* & \epsilon_1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$
   Mitä eri matriisielementit kuvaavat?
   c) Käyttäen tietojasi kaksitilasysteemin aikakehityksestä kerro kuvaajan avulla kuinka todennäköisyys löytää atomi perustilaltaan käyttäytyy ajan funktiona. Entä jos laser ei olisi aivan resonanssissa viritystilan kanssa?