Aalto-yliopisto, Matematiikan laitos Peltonen, Kinnunen/Lehtelä

Mat-1.1030, Matematiikan peruskurssi L3

4. välikoe, 14.12.2012

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

1. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia ja mitkä epätosia? Jos väite on tosi, niin pelkkä vastaus riittää. Jos väite on epätosi, niin perustele vastauksesi lyhyesti. Lue väitteet huolella, sillä tehtävässä testataan käsitteiden täsmällistä hallintaa.

   (a) $\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$, missä $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$ on sisätulo avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

   (b) Jos yleisessä sisätuloavaruudessa pätee $\langle u, v\rangle = 0$, niin $u = 0$ tai $v = 0$.

   (c) Oletetaan, että $\{v_1, \ldots, v_n\}$ on ortogonaalinen joukko vektoriavaruudessa V. Silloin mielivaltaisen vektorin $v \in V$ projektio p aliavaruudelle Span $(v_1, \ldots, v_n)$ saadaan kaavasta

   $$p = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i.$$

   (d) Jos kaksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruutta ovat ortogonaalisia standardin euklidisen sisätulon suhteen, niin ne ovat toistensa ortogonaalikomplementteja.

   (e) Jokainen äärellisen monen alkion ortogonaalinen joukko sisätuloavaruudessa on lineaarisesti riippumaton.

   (f) Jos S on sisätuloavaruuden V lineaarinen aliavaruus ja v on sellainen vektori, että $v \in S$ ja $v \in S^{\perp}$, niin $v = 0$.

2. Oletetaan, että avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on standardi euklidinen sisätulo. Muodosta vektoreista

   $$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1) \quad \text{ja} \quad u_3 = (0, 0, 1)$$

   ortonormaali kanta avaruuteen $\mathbb{R}^3$ Gram-Schmidt-menetelmän avulla.

3. Oletetaan, että A on $m \times n$-matriisi ja $\dim C(A) = n$, missä $C(A)$ on matriisin A sarakeavaruus. Tarkastellaan projektiomatriisia $P = A(A^TA)^{-1}A^T$.

   (a) Näytä, että $Pb = b$ kaikilla $b \in C(A)$.

   (b) Näytä, että $Pb = 0$ kaikilla $b \in C(A)^{\perp}$.