

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

1. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia ja mitkä epätosia? Jos väite on tosi, niin pelkkä vastaus riittää. Jos väite on epätosi, niin perustele vastauksesi lyhyesti.
 - (a) Vektorit $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 5, 5)$ ja $(1, 2, 3)$ ovat lineaarisesti riippuvia avaruudessa \mathbb{R}^3 .
 - (b) Vektorit $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$ ja $(1, 1, 1)$ ovat lineaarisesti riippumattomia avaruudessa \mathbb{R}^3 .
 - (c) Vektorit $(1, 1, 2)$, $(1, 0, 1)$ ja $(2, 1, 3)$ virittävät avaruuden \mathbb{R}^3 .
 - (d) Joukko $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\}$ on avaruuden \mathbb{R}^2 lineaarinen aliavaruus.
 - (e) Kuvaus $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x) = (x_2, 1, x_1 + x_2)$ on lineaarinen.
 - (f) Kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$ on bijektio.

2. Tarkastellaan lineaarikuvausta

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, L(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_1 - x_3, 2x_3 - x_1 - x_2).$$

- (a) Mikä on lineaarikuvauksen L matriisiesitys avaruuden \mathbb{R}^3 standardikannan suhteen?
 - (b) Määritä nolla-avaruus $N(L)$.
 - (c) Määritä kuva-avaruus $R(L) = L(\mathbb{R}^3)$.
3. Olkoon $L : V \rightarrow W$ lineaarikuvaus ja S avaruuden W lineaarinen aliavaruus. Aliavaruuden S alkukuva kuvauksessa L on joukko

$$L^{-1}(S) = \{v \in V : L(v) \in S\}.$$

Näytä, että $L^{-1}(S)$ on avaruuden V lineaarinen aliavaruus.