

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

1. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia/epätosia? Jos väite on tosi, pelkkä toteaminen todeksi riittää. Jos väite on epätosi, anna lisäksi lyhyt perustelu.

- (a) Funktiolla $f : z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ on origossa poistuva erikoispiste ja siksi f voidaan jatkaa analyyttiseksi funktioksi koko kompleksitasoon.
- (b) Koska funktiolla $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ on rengasalueessa $\mathbb{C} \setminus \bar{B}(1, 1)$ Laurentin kehitelmä

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}},$$

jossa on ääretön määrä muuttujan $z-1$ negatiivisia potensseja, niin siksi origon erikoispiste on oleellinen.

- (c) Funktiolla $z \mapsto \sin \frac{1}{z}$ on origossa ensimmäisen kertaluvun napa ja siksi funktio $z \mapsto z \sin \frac{1}{z}$ voidaan jatkaa analyyttiseksi funktioksi koko kompleksitasoon.

2. Tarkastellaan funktiota

$$z \mapsto \frac{i(1-z)}{1+z}$$

laajennetussa kompleksitasossa $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- (a) Määrää yksikkökierokkeen $\bar{B}(0, 1)$ kuvajoukko.
- (b) Määrää ylempään puoliavaruuden $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ kuvajoukko.
- (c) Määrää joukon $B(1, 1) \cup B(-1, 1)$ kuvajoukko.

3. Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja γ yksikköympyrän $S(0, 1)$ parametrisointi yhden kerran positiiviseen kiertosuuntaan. Määrää integraalin

$$\oint_{\gamma} \frac{idz}{(z-a)(az-1)}$$

arvo, kun

- (a) $0 < a < 1$,
- (b) $a > 1$

Olethan muistanut vastata kurssin palautekyselyyn Nopassa? Vaikuttaminen sen kautta on mahdollista vielä tänään 2.11!